Tutorien-/Selbstübungsblatt 6

6.1* Regel von de l'Hospital

Wir haben schon Folgen und deren Grenzwerte betrachtet. Dabei kam schon hier und da mal die Frage auf, was die Grenzwerte/Fälle

$$\frac{0}{0} \qquad \text{und} \qquad \frac{\infty}{\infty}$$

zu berechnen sind. Die gleichen Fälle tauchen bei Grenzwerten von Funktionen auf:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}: \qquad \frac{0}{0} \qquad \text{oder} \qquad \frac{\infty}{\infty}.$$

Da wir nun etwas Abstand zu den Grenzwerten und Ableitungen haben und wir sie hoffentlich etwas haben sacken lassen, wollen wir uns diesem Fällen mal annehmen. Des Pudels Kern ist das folgende.

Theorem 6.1.1. *Sei $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in (a,b)$ differenzierbar (oder $x_0 = \infty, -\infty$). Falls*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0 \quad \textit{oder} \quad = \infty$$

gilt und $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (eigentlich oder uneigentlich) existiert, dann gilt

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \quad = \quad \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Beispiel 6.1.2.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1.$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x)-1}{\ln(x+1)} \overset{\text{d'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\exp(x)}{(x+1)^{-1}} = 1.$

c) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{\exp(x)}{x} \overset{\text{d'H}}{=} \lim_{x\to \infty} \frac{\exp(x)}{1} = \infty.$

Durch Umstellen, können wir damit aber auch Fälle der Art

$$0 \cdot \infty$$

betrachten. Haben wir $f(x) \to 0$ und $g(x) \to \infty$ so gilt $\frac{1}{g(x)} \to 0$ und somit

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$$

was dem Fall $\frac{0}{0}$ entspricht. Oder eine zweite Möglichkeit ist, wenn wir $f(x) > 0$ oder $f(x) < 0$ für alle x wissen, dann folgt

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}.$$

Beispiel 6.1.3. Schauen wir uns $x \cdot \ln x \xrightarrow{x \to 0}$ mit $x > 0$ an. Dann haben wir

$$x \to 0 \qquad \text{und} \qquad \ln x \to -\infty.$$

Also mit $x > 0$ folgt

$$\frac{1}{x} \to \infty$$

und somit

$$\lim_{x \to 0} x \cdot \ln x = \lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{x^{-1}}.$$

Bei dem letzten Ausdruck können wir also die Regel von de l'Hospital anwenden:

$$\lim_{x \to 0} x \cdot \ln x = \lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{x^{-1}} = \lim_{x \to 0} \frac{(\ln x)'}{(x^{-1})'} = \lim_{x \to 0} \frac{x^{-1}}{-1 \cdot x^{-2}} = \lim_{x \to 0} -x = 0.$$

Aufgabe 6.1.4. Berechnen Sie folgende Grenzwerte mit Hilfe der Regel von de l'Hospital. Welcher Fall $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ liegt vor?

a) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x}$

b) $\displaystyle\lim_{x \to 0, x > 0} \frac{\cos(\pi - x^2)}{x^3}$

c) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} x^2 \cdot \ln(1 + e^{-x^2})$

6.2 Taylorpolynome

A priori kann ein Mensch und ein Computer nur eine einzige mathematische Operation ausführen:

$$\text{Addition: } +$$

Mit der Addition gewinnen wir und der Computer dann die Subtraktion $-$, die Multiplikation $\cdot$ und letztendlich die Division $\div$.

Ist $x \in \mathbb{R}$ also eine Zahl, dann können wir

$$x,\ x^2,\ x^3,\ \dots$$

berechnen. Und mit weiteren Zahlen $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots \in \mathbb{R}$ können wir und ein Computer auch

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

berechnen, also *Polynome*. Und das macht ein Computer sogar extrem gut! Aber wir kennen neben Polynomen noch andere Funktionen. So z.B. $\sin x$, $\cos x$, e^x, etc. sind Funktionen die wir schon kennen und von größter Bedeutung sind. Aber wie berechnen wir die Werte $\sin x$, $\cos x$, e^x, etc. für ein gegebenes $x \in \mathbb{R}$?

Haben wir eine Funktion $f(x)$, so möchten wir $f(x)$ so gut wie möglich durch ein Polynom annähern:

$$f(x) \approx a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

denn Polynome können wir ja sehr gut berechnen.

Aber wie kommen wir solch ein Polynom heran, welches $f(x)$ approximiert? Meist kennt man $f(x)$ and einer Stelle x, z.B. $x = 0$, bekannt. Dann gilt

$$f(0) = a_0.$$

Kennen wir dazu noch die Werte der Ableitungen $f^{(1)}(0), \dots, f^{(n)}(0)$, so erhalten wir durch ableiten des approximierenden Polynoms die Aussagen

$$\begin{aligned} f'(0) &= a_1 \\ f''(0) &= 2a_2 \\ f'''(0) &= 2 \cdot 3 \cdot a_3 \\ f^{(4)}(0) &= 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot a_4 \\ &\vdots \\ f^{(n)}(0) &= n! \cdot a_n \\ &\vdots \end{aligned}$$

Schauen wir uns dazu das Beispiel der Exponentialfunktion e^x aus der Vorlesung nochmals an. Wir wissen, $(e^x)' = e^x$ und $e^0 = 1$. Also

$$1 = a_0 = a_1 = 2 \cdot a_2 = 2 \cdot 3a_3 = \dots = n! \cdot a_n = \dots$$

und somit sollte gelten

$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}.$$

Wir haben in der Vorlesung gesehen, das dies in der Tat gilt für alle $x \in \mathbb{R}$. Dabei heißt der Punkt $x_0 = 0$ *Entwicklungspunkt*, da wir die Ableitungen dort auswerten.

Allgemein bekommen wir also

$$f(x_0) + f'(x_0) \cdot x + \frac{f''(x_0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!} x^3 + \dots$$

Haben wir auf diese Weise ein Polynom from Grad n, $n \in \mathbb{N}$, gefunden, so nennen wir dieses das *n-te Taylorpolynom*.

Schauen wir uns als Beispiel den Cosinus $f(x) = \cos x$ an und den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. Wir wissen nämlich

$$\begin{aligned} f(x_0) &= \cos 0 = 1 \\ f'(x_0) &= \sin 0 = 0 \\ f''(x_0) &= -\cos 0 = -1 \\ f'''(x_0) &= -\sin 0 = 0 \\ f^{(4)}(x_0) &= f(x_0) = 1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Wir erhalten also das n-te Taylorpolynom

$$1 + 0 \cdot x + \frac{-1}{2!}x^2 + 0 \cdot x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots$$

und somit

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!} x^i.$$

Als weiteres Beispiel wollen wir das Taylorpolynom um $x_0 = 0$ vom Grad n der Funktion $\cos x^3$ berechnen. Wir können wieder alle bis zu n-ten Ableitung berechnen. Oder wir nehmen das Taylorpolynom von $\cos y$ und setzen $y = x^3$. Denn wir setzen in ein Polynom ein anderes ein und bekommen wieder ein Polynom:

$$1 - \frac{1}{2!}(x^3)^2 + \frac{1}{4!}(x^3)^4 \mp \dots$$

Aufgabe 6.2.1. Bestimmen Sie die folgenden Taylorpolynome.

a) Das Taylorpolynom von $f(x) = x \cdot \cos x$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ vom Grad 6.

b) Das Taylorpolynom von $f(x) = \sin x^2$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ vom Grad 3.

c) Das Taylorpolynom von $f(x) = x^2 \cdot e^{-2x^3}$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ vom Grad 16.

Einige Hinweise zu den Taylorpolynomen:

1) Das Taylorpolynom approximiert $f(x)$ nicht immer: Konvergenzradius.

2) Der Fehler zwischen Taylorpolynom und $f(x)$ kann abgeschätz werden: Restglied.

3) $f(x)$ kann eine nicht konstante Funktion sein, das Taylorpolynom ist aber immer konstant. So z.B. $f(x) = e^{-x^{-2}}$ hat das n-te Taylorpolynom 1, für jedes $n \in \mathbb{N}$.

6.3* lokale Minima und Maxima

Aus den Taylorpolynomen kann auf Minima und Maxima geschlossen.[1] Eine Funktion $f(x)$ and x_0 mit

$$f'(x_0) = 0 \qquad \text{und} \qquad f''(x_0) \neq 0$$

hat für $f''(x_0) < 0$ ein Maxima, für $f''(x_0) > 0$ ein Minima.

Aufgabe 6.3.1. Ein Gärtner hat ein Metallblech der Länge 4m (und Höhe 10cm) und will damit ein rechteckiges Stück eines seiner Beete einrahmen, damit die Schnecken nicht den Salat dort fressen. Wie muss das Rechteck in gewählt werden, damit ein möglichst großes Stück Beet eingerahmt wird?

[1] Ist hier jetzt (noch) nicht gezeigt.

Lösungen

Regel von de l'Hospital

Lösung (von Aufgabe 6.1.4)**.** Berechnen Sie folgende Grenzwerte mit Hilfe der Regel von de l'Hospital. Welcher Fall $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ liegt vor?

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{x}$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{(e^x)'}{(x)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{1} = \infty.$$

b) $\lim\limits_{x\to 0, x>0} \dfrac{\cos(\pi - x^2)}{x^3}$:

$$\lim_{x\to 0, x>0} \frac{\cos(\pi/2 - x^2)}{x^3} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0, x>0} \frac{(\cos(\pi/2 - x^2))'}{(x^3)'} = \lim_{x\to 0, x>0} \frac{2x \cdot \sin(\pi/2 - x^2)}{3x^2}$$
$$= \lim_{x\to 0, x>0} \frac{2\sin(\pi/2 - x^2)}{3x} = \infty.$$

Wir mussten also die Regel von de l'Hospital mehrmals anwenden.

c) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 \cdot \ln(1 + e^{-x^2})$:

$$\lim_{x\to\infty} x^2 \cdot \ln(1 + e^{-x^2}) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1 + e^{-x^2})}{x^{-2}} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{(\ln(1 + e^{-x^2}))'}{(x^{-2})'}$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(1 + e^{-x^2})^{-1} \cdot e^{-x^2} \cdot -2x}{-2x^{-3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\overbrace{(1 + e^{-x^2})^{-1}}^{\to 1} \cdot e^{-x^2}}{x^{-4}}$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x^2}}{x^{-4}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^4}{e^{x^2}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{4x^3}{2x \cdot e^{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{e^{x^2}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{4x}{2x \cdot e^{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^{x^2}} = 0.$$

Hier mussten wir wieder mehrmals die Regel von de l'Hospital anwenden, die Grenzwertausdrücke umformen und haben sogar die Fälle $\frac{0}{0}$ und $\frac{\infty}{\infty}$ zusammen in einer Aufgabe.

Lösung (von Aufgabe 6.2.1)**.** Wir bestimmen die folgenden Taylorpolynome.

a) Das Taylorpolynom von $f(x) = x \cdot \cos x$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ vom Grad 6:

Wir wissen, dass das Taylorpolynom von $\cos x$

$$1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 \pm \dots + \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}$$

ist. Multiplizieren wir dies mit x bekommen wir

$$x - \frac{1}{2!}x^3 + \frac{1}{4!}x^5 - \frac{1}{6!}x^7 \pm \dots + \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k+1}$$

und somit das Taylorpolynom vom Grad k von $x \cdot \cos x$. Da wir nur bis Grad 6 haben wollen:

$$x - \frac{1}{2!}x^3 + \frac{1}{4!}x^5.$$

b) Das Taylorpolynom von $f(x) = \sin x^2$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ vom Grad 3:

Für den Sinus $\sin y$ haben wir das n-te Taylorpolynom

$$y - \frac{1}{3!}y^3 + \frac{1}{5!}y^5 \mp \dots \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}y^{2k+1}.$$

Setzen wir $y = x^2$ und betrachten wir nur bis Grad 3 erhalten wir:

$$x^2.$$

c) Das Taylorpolynom von $f(x) = x^2 \cdot e^{-2x^3}$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ vom Grad 16:

Für e^y haben wir das k-te Taylorpolynom

$$1 + y + \dots + \frac{1}{k!}y^k.$$

Setzen wir $y = -2x^3$ bekommen wir

$$1 - 2x^3 + \frac{1}{2!}(-2x^3)^2 + \dots + \frac{1}{k!}(-2x^3)^k$$

Multiplizieren wir noch mit x^2 bekommen wir

$$\begin{aligned} &x^2 - 2x^5 + \frac{1}{2!}(-2x^3)^2 \cdot x^2 + \frac{1}{3!}(-2x^3)^3 \cdot x^2 + \frac{1}{4!}(-2x^3)^4 \cdot x^2 \\ &= x^2 - 2x^5 + 2x^8 + \frac{-4}{3}x^{11} + \frac{2}{3}x^{14} \end{aligned}$$

da wir nur bis Grad 16 haben wollen. Der nächste Term wäre nämlich $c \cdot x^{17}$.

Lösung (von Aufgabe 6.3.1)**.** Ein Gärtner hat ein Metallblech der Länge 4m (und Höhe 10cm) und will damit ein rechteckiges Stück eines seiner Beete einrahmen, damit die Schnecken nicht den Salat dort fressen. Wie muss das Rechteck in gewählt werden, damit ein möglichst großes Stück Beet eingerahmt wird?

Antwort: Das Blech hat die Länge $L = 4m$. Ein Rechteck der Seitenlänge a, b hat den Umfang $U = 2a + 2b$ und die Fläche $F = a \cdot b$. Der Umfang U entspricht der Länge L des Bleches:

$$2a + 2b = U = L.$$

Stellen wir nach b um erhalten wir

$$b = \frac{L}{2} - a. \tag{$*$}$$

Setzen wir b in die Fläche F ein, bekommen wir

$$F = a \cdot b = a \cdot (L/2 - a) = aL/2 - a^2.$$

Die Fläche F hängt also bei fixem L nur noch von a ab. Wir wollen das Maximum davon bestimmt. Die erste Ableitung muss also null sein. Wir bekommen

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a} F = L/2 - 2a \qquad \Rightarrow \qquad a = L/4 = 4/4m = 1m.$$

b erhalten wir aus $(*)$:

$$b = L/2 - a = 4/2m - 1m = 1m.$$

Zudem erhalten wir die Zweite Ableitung an $a = 1m$ zu

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}^2 a} F = -2 < 0$$

also liegt ein Maximum vor. Eine quadratische Einrahmung ($a = b = 1m$) maximiert also die umrahmte Fläche.