Tutorien-/Selbstübungsblatt 4

4.1 Ableitungen

Ableitungen können mit mehreren Symbolen gekennzeichnet werden. Das häufigste ist $'$ wie in $f'(x)$, $f''(x)$, etc. Daneben wird auch $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ verwendet wie in $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$, oder ∂ bzw. ∂_x wie in $\partial_x f(x)$. Auch D wird verwendet: $Df(x)$.

4.1.1 Produktregel

Das Ableiten eines Produktes $f(x) \cdot g(x)$ geschieht nach:

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x),$$

d.h. jeder Faktor, hier f und g, werden einzeln abgeleitet wobei die anderen unberührt bleiben.

Haben wir z.B. $x^2 = x \cdot x$ so erhalten wir

$$[x^2]' = [x \cdot x]' = 1 \cdot x + x \cdot 1 = 2x.$$

Oder $x \cdot \sin x$ ergibt

$$[x \cdot \sin x]' = 1 \cdot \sin x + x \cdot \cos x.$$

4.1.2 Quotientenregel

Haben wir einen Quotienten $\frac{f(x)}{g(x)}$, so ergibt sich die Ableitung

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.$$

Für den Bruch $\frac{x}{x^2+1}$ haben wir

$$\left[\frac{x}{x^2+1}\right]' = \frac{1 \cdot (x^2+1) - x \cdot (2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}.$$

Oder für $\frac{\cos x}{\sin x + 2}$ bekommen wir

$$\left[\frac{\cos x}{\sin x + 2}\right]' = \frac{-\sin x \cdot (\sin x + 2) - \cos x \cdot \cos x}{(\sin x + 2)^2} = \frac{-(\sin x)^2 - 2\sin x - (\cos x)^2}{(\sin x + 2)^2} = \frac{-2\sin x - 1}{(\sin x + 2)^2}.$$

4.1.3 Kettenregel

Die Kettenregel lautet wie folgt:

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

So z.B. für $\sin(x^2)$ bekommen wir

$$[\sin(x^2)]' = \cos(x^2) \cdot 2x.$$

Oder für $\ln(x^4 + x^2 + 1)$ bekommen wir

$$[\ln(x^4 + x^2 + 1)]' = \frac{1}{x^4 + x^2 + 1} \cdot (4x^3 + 2x) = \frac{4x^3 + 2x}{x^4 + x^2 + 1}$$

wobei wir die Ableitung von $\ln x$ als x^{-1} haben.

4.1.4 Verknüpfung aller drei Regeln

Die meisten Funktionen lassen sich nicht nach einer Regel ableiten, sondern mehrere Regeln greifen hintereinander. Schauen wir uns dazu die Funktion

4.1.5 Höhere Ableitungen

Haben wir für eine Funktion $f(x)$ die Ableitung $f'(x)$ berechnet, so stellt $f'(x)$ wieder eine Funktion dar. Daher können wir (unter Umständen) diese nochmals ableiten:

$$[f'(x)]' = f''(x).$$

So berechnen wir sukzessive alle höheren Ableitungen. Merke dabei, dass Ausdrücke wie die 7te Ableitung $f'''''''(x)$ sehr unübersichtlich sind. Daher wird (meist ab 4ter Ableitung) die Schreibweise

$$f^{(4)}(x), f^{(5)}(x), f^{(6)}(x), f^{(7)}(x), \ldots$$

genommen. Um nicht mit dem Quadrat oder der Vierten Potenz durch einander zu kommen, beachte, dass die Zahlen in Klammern gesetzt sind.

Aufgabe 4.1.1. Berechnen Sie die ersten Ableitungen.

a) $a(x) = x^4 \cdot \sin(x^3)$

b) $b(x) = e^{-x^2} \cdot \sin(x^2 - 1)$

c) $c(x) = \frac{x^3-4x+1}{x^4-x^2+2}$

d) $d(x) = x^2 \cdot \sin x \cdot \exp(x^2)$

Aufgabe 4.1.2. Seien

$$f(x) = 3x^3 - x^2 + 7x - 3 \quad \text{auf } \mathbb{R}, \qquad g(x) = \sin(x) \cdot \ln(x) \quad \text{auf } (0, \infty),$$
$$h(x) = \exp(x^2 - x + 3) \quad \text{auf } \mathbb{R}, \qquad k(x) = \frac{x^2 - 1}{x^4 + 1} \quad \text{auf } \mathbb{R}.$$

Berechne

a) $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, $f^{(4)}(x)$, $f^{(5)}(x), f^{(6)}(x), \ldots,$

b) $g'(x)$, $g''(x)$, $g'''(x)$,

c) $h'(x)$, $h''(x)$, $h'''(x)$ und

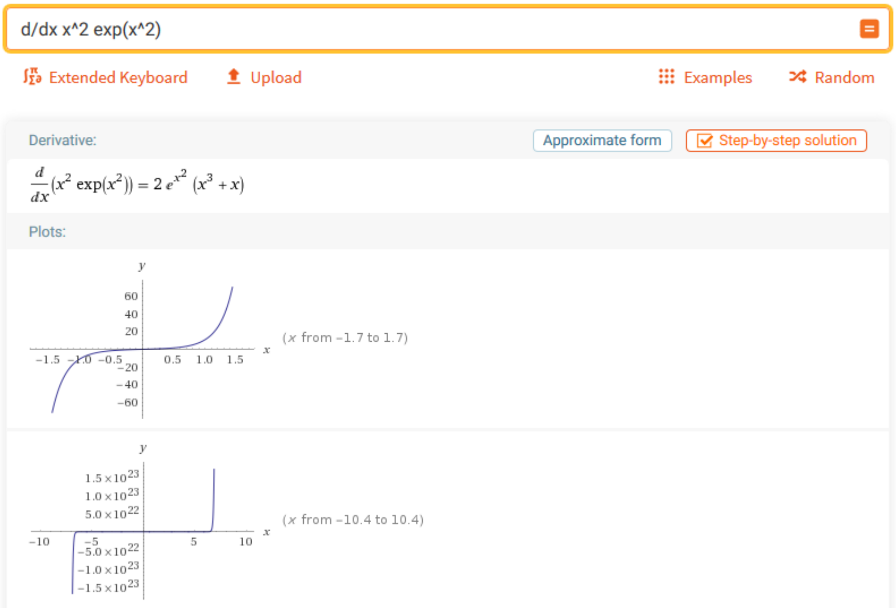
d) $k'(x)$, $k''(x)$.

4.1.6 Selbst weiter üben und Lösungen überprüfen

Im Selbstübungsblatt 3 haben wir euch schon die Website

https://www.wolframalpha.com/input

von Mathematica gezeigt, in der Ihr Graphen zeichnen könnt. Diese Website kann noch mehr, nämlich Ableitungen berechnen.[1] Wollen wir z.B. die Ableitung von $x^2 \cdot e^{-x^2}$ berechnen, so geben wir das folgende ein und bekommen auch das folgende Ergebnis:



Viel Spaß beim selbst Funktionen ausdenken und ableiten!

4.1.7* Eine differenzierbare Funktion die nicht stetig differenzierbar ist

Wir haben im Selbstübungsblatt 3 die Funktion

$$\sin x^{-1}$$

kennen gelernt und untersucht. Insbesondere haben wir gesehen, wie sich die Perioden an $x = 0$ häufen.

Wir schauen uns nun die Funktion

$$f(x) = x^2 \cdot \sin x^{-1}$$

an. Für $x \neq 0$ können wir die Ableitung direkt berechnen:

$$f'(x) = 2x \cdot \sin x^{-1} - \cos x^{-1}.$$

[1] Daher gibt es bei den Hausaufgaben auf die reine Angabe der Ableitungen keine Punkte. Nur in Verbindung mit dem Rechenweg.

Wir sehen hier

$$\lim_{x\to 0} 2x \cdot \sin x^{-1} = 0$$

aber

$$\cos x^{-1}$$

hat wieder wie $\sin x^{-1}$ die ganzen Perioden aus dem Unendlichen an $x = 0$ gehäuft. Es sieht daher im erst Blick danach aus, dass $f'(0)$ nicht existiert. Der Eindruck trügt aber. Berechnen wir nämlich die Ableitung nach der formalen Definition

$$f'(x_0) := \lim_{h\to\infty} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

dann sehen wir das Folgende. Zuvor erstmal

$$f(0) = \lim_{x\to 0} x^2 \cdot \sin x^{-1} = 0$$

und damit bekommen wir

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h\to\infty} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h^2 \cdot \sin h^{-1} - 0}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} h \cdot \sin h^{-1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Damit existiert also auch die Ableitung an $x_0 = 0$ und wir haben

$$(x^2 \sin x^{-1})' = \begin{cases} 2x \cdot \sin x^{-1} - \cos x^{-1} & \text{für } x \neq 0. \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Insbesondere sehen wir, dass die Ableitung also nicht stetig ist.

Lösungen

Ableitungen

Lösung (von Aufgabe 4.1.1)**.** Wir berechnen die ersten Ableitungen:

a) $a(x) = x^4 \cdot \sin(x^3)$:

$$a'(x) = 4x^3 \cdot \sin(x^3) + x^4 \cdot \cos(x^3) \cdot 3x^2$$

b) $b(x) = e^{-x^2} \cdot \sin(x^2 - 1)$:

$$\begin{aligned} b'(x) &= e^{-x^2} \cdot (-2x) \cdot \sin(x^2 - 1) + e^{-x^2} \cdot \cos(x^2 - 1) \cdot 2x \\ &= 2x \cdot e^{-x^2} \cdot [\cos(x^2 - 1) - \sin(x^2 - 1)] \end{aligned}$$

c) $c(x) = \frac{x^3 - 4x + 1}{x^4 - x^2 + 2}$

$$\begin{aligned} c'(x) &= \frac{(3x^2 - 4)(x^4 - x^2 + 2) - (x^3 - 4x + 1)(4x^3 - 2x)}{(x^4 - x^2 + 2)^2} \\ &= \frac{-x^6 + 11x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 2x - 8}{(x^4 - x^2 + 2)^2} \end{aligned}$$

d) $d(x) = x^2 \cdot \sin x \cdot \exp(x^2)$

$$\begin{aligned} d'(x) &= 2x \cdot \sin x \cdot \exp(x^2) + x^2 \cdot \cos x \cdot \exp(x^2) + x^2 \cdot \sin x \cdot \exp(x^2) \cdot 2x \\ &= (2x^3 + 2x) \cdot \sin x \cdot \exp(x^2) + x^2 \cdot \cos x \cdot \exp(x^2) \end{aligned}$$

Lösung (von Aufgabe 4.1.2)**.** Seien

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^3 - x^2 + 7x - 3 \quad \text{auf } \mathbb{R}, & g(x) &= \sin(x) \cdot \ln(x) \quad \text{auf } (0, \infty), \\ h(x) &= \exp(x^2 - x + 3) \quad \text{auf } \mathbb{R}, & k(x) &= \frac{x^2 - 1}{x^4 + 1} \quad \text{auf } \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Wir berechnen

a) $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, $f^{(4)}(x)$, $f^{(5)}(x)$, $f^{(6)}(x), \ldots$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 9x^2 - 2x + 7 \\ f''(x) &= 18x - 2 \\ f'''(x) &= 18 \\ f^{(4)}(x) &= 0 = f^{(5)}(x) = f^{(6)}(x) = \ldots \end{aligned}$$

b) $g'(x)$, $g''(x)$, $g'''(x)$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \cos(x) \ln(x) + \sin(x) x^{-1} \\ g''(x) &= -\sin(x) \ln(x) + \cos(x) x^{-1} + \cos(x) x^{-1} - \sin(x) x^{-2} \\ g'''(x) &= -\cos(x) \ln(x) - \sin(x) x^{-1} - \sin(x) x^{-1} + \cos(x) x^{-2} + \sin(x) x^{-1} - \cos(x) x^{-2} \\ &\quad - \cos(x) x^{-2} + 2 \sin(x) x^{-3} \end{aligned}$$

c) $h'(x)$, $h''(x)$, $h'''(x)$:

$$\begin{aligned}
h'(x) &= (2x-1)\exp(x^2-x+3)\\
h''(x) &= 2\exp(x^2-x+3) + (2x-1)^2\exp(x^2-x+3)\\
h'''(x) &= 2(2x-1)\exp(x^2-x+3) + 4(2x-1)\exp(x^2-x+3) + (2x-1)^3\exp(x^2-x+3)\\
&= [6(2x-1)+(2x-1)^3]\exp(x^2-x+3)
\end{aligned}$$

d) $k'(x)$, $k''(x)$:

$$\begin{aligned}
k'(x) &= \frac{2x(x^4+1)-(x^2-1)4x^3}{(x^4+1)^2} = \frac{-2x^5+4x^3+2x}{(x^4+1)^2}\\
k''(x) &= \frac{(-10x^4+12x^2+2)(x^4+1)^2-(-2x^5+4x^3+2x)2\cdot 4x^3(x^4+1)}{(x^4+1)^4}\\
&= \frac{(-10x^4+12x^2+2)(x^4+1)-(-2x^5+4x^3+2x)8x^3}{(x^4+1)^3}
\end{aligned}$$