Kapitel 1: Reelle Zahlen

Kapitel 2: Folgen und Reihen

Konvergente Teilfolgen von beschränkten Folgen

Theorem 2.1

Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.

Beweis (mit Bisektionsverfahren):

Kapitel 3: Reelle Funktionen

3.1 Grenzwerte und Stetigkeit

Motivation

Bekannt: Eine Folge $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $A \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$), in Zeichen

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \qquad \text{oder} \qquad a_n \xrightarrow{n\to\infty} A.$$

Frage: Wenn wir eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ haben und wir betrachten die Folge $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$. Können wir etwas über die Konvergenz oder gar den Grenzwert sagen? Was muss f erfüllen, damit

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(A) \qquad \text{bzw.} \qquad f(a_n) \xrightarrow{n\to\infty} f(A)$$

gilt?

Antwort: Stetigkeit!

Grenzwert-Definition

Definition 3.2

Sei $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir sagen, dass die Funktionswerte $f(x)$ bei Annäherung von $x \in D$ an x_0 gegen einen Grenzwert $a \in \mathbb{R}$ streben, in Zeichen

$$f(x) \xrightarrow{x \to x_0} a \qquad \text{oder} \qquad \lim_{x \to x_0} f(x) = a,$$

wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ derart gibt, dass $|f(x) - a| < \varepsilon$ gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $0 < |x - x_0| < \delta$.

Anschauung: Wann immer wir eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_+}$ haben die gegen x_0 konvergiert, so soll auch die Folge $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ gegen a konvergieren (unabhängig von der gewählten Folge!). D.h. egal wie wir x_0 mit x approximieren/annähern/etc., dann nähert sich auch $f(x)$ auch einer Zahl a an.

Achtung: $x \neq x_0$ bzw. $x_n \neq x_0$. f muss in x_0 nicht definiert sein.

Einseitige Grenzwert

Definition 3.3

f besitzt in x_0 den linksseitigen (bzw. rechtsseitigen) Grenzwert a, falls für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \to x_0$ und $x_n < x_0$ (bzw. $x_n > x_0$), in Zeichen

$$f(x) \xrightarrow[x<x_0]{x\to x_0} a \qquad \text{oder} \qquad \lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x) = a,$$

wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ derart gibt, dass $|f(x) - a| < \varepsilon$ gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $0 < x_0 - x < \delta$.

Äquivalent definieren wir

$$f(x) \xrightarrow{x\to\infty} a, \qquad f(x) \xrightarrow{x\to x_0} \infty, \qquad f(x) \xrightarrow{x\to\infty} \infty$$

und so auch für $-\infty$.

Beispiele

Wollen

$$|f(x) - a| < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad x \quad \text{mit} \quad |x_0 - x| < \delta(\varepsilon).$$

1. $f(x) = x$, $x_0 \in \mathbb{R}$:
   - Es gilt: $\lim_{x\to x_0} f(x) = a = x_0$.
   - Sei $\varepsilon > 0$ und $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$, dann gilt $|f(x) - a| = |x - x_0| < \varepsilon = \delta(\varepsilon)$.
2. $g(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$:
   - Es gilt: $\lim_{x\to x_0} g(x) = a = \dfrac{1}{x_0}$.
   - Sei $1 \gg \varepsilon > 0$, x mit $|x_0 - x| < \varepsilon$ und $\delta(\varepsilon) \leq \frac{\varepsilon \cdot x_0^2}{2}$, dann gilt $|x_0| \leq 2|x|$ und
   $$|g(x) - a| \;=\; \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| \;=\; \left|\frac{x_0 - x}{x \cdot x_0}\right| \;\leq\; \frac{2}{x_0^2} \cdot |x_0 - x| \;<\; \frac{2\delta(\varepsilon)}{x_0^2} \;\leq\; \varepsilon.$$
3. $h(x) = \frac{1}{x-1}$, dann gilt $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \dfrac{1}{x-1} = \infty$ und $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{1}{x-1} = -\infty$

Rechenregeln für Grenzwerte

Theorem 3.4

Seien $f, g : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen mit Grenzwerten

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \qquad \textit{und} \qquad \lim_{x\to x_0} g(x) = b.$$

Dann gilt:

1. $\lim_{x\to x_0} [\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)] = \alpha \cdot a + \beta \cdot b$ *für alle* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
2. $\lim_{x\to x_0} f(x) \cdot g(x) = a \cdot b$.
3. $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$, *wenn* $b \neq 0$ *und* $g(x) \neq 0$.

Beweis:

Theorem 3.5

Seien $f : D \subseteq \mathbb{R}$ *und* $g : f(D) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *Funktionen mit* $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$ *und* $\lim_{x\to a} g(x) = b$. *Dann gilt*

$$\lim_{x\to x_0} (g \circ f)(x) = \lim_{x\to x_0} g(f(x)) = b.$$

Beweis:

Stetigkeit

Definition 3.6

Eine Funktion $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt stetig in $x_0 \in D$, wenn

$$f(x) \xrightarrow{x \to x_0} f(x_0) \qquad \text{bzw.} \qquad \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

$f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt stetig (in D), falls f in jedem $x_0 \in D$ stetig ist.

Bemerkung: Stetigkeit von f in x_0 bedeutet, dass Funktionsauswertung und Grenzwertbildung vertauscht werden kann:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \quad = \quad f(x_0) \quad = \quad f\left(\lim_{x \to x_0} x\right).$$

Rechenregeln: Es gelten die gleichen Rechenregeln wie für die Grenzwerte (und Folgen).

Beispiele für stetige Funktionen

1. x auf $\mathbb{R}$
2. Polynom $p(x)$ in x auf $\mathbb{R}$
3. $|x|$ auf $\mathbb{R}$
4. x^a mit $a \in \mathbb{R}$ auf $(0, \infty)$
5. $\exp(x) = e^x$ auf $\mathbb{R}$
6. $\sin(x)$ und $\cos(x)$ auf $\mathbb{R}$
7. Umkehrfunktionen bijektiver, stetiger Funktionen
8. $\log(x)$ auf $(0, \infty)$
9. $\arcsin(x)$, $\arccos(x)$ auf $[-1, 1]$

A. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{x^2+1} = 0$:

$$0 < \underbrace{\frac{x}{x^2+1}}_{\xrightarrow{x\to\infty} 0} \leq \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x} \xrightarrow{x\to\infty} 0$$

B. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{x}{|x|} = 1$:
Für jedes $x > 0$ gilt $\frac{x}{|x|} = 1$, d.h. für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \to 0$ und $x_n > 0$ gilt $\frac{x_n}{|x_n|} = 1$.

Zwischenwertsatz

Theorem 3.7 (Zwischenwertsatz)

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *eine stetige Funktion und* $f(a) \neq f(b)$. *Dann gibt es zu jedem Wert* c *zwischen* $f(a)$ *und* $f(b)$ *mindestens eine Stelle* $\xi \in (a,b)$ *mit* $f(\xi) = c$.

Theorem 3.8 (Existenz von Nullstellen)

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *stetig und* $f(a) \cdot f(b) < 0$. *Dann hat* f *in* (a,b) *eine Nullstelle.*

Beweis (Bisektionsverfahren): Durch $f \mapsto f - c$ reicht es Theorem 3.8 zu beweisen.

Min-Max-Prinzip

Theorem 3.9 (Min-Max-Prinzip)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es ein x_* und ein x^* in $[a, b]$ mit

$$f(x_*) \leq f(x) \leq f(x^*)$$

für alle $x \in [a, b]$, d.h. f nimmt auf $[a, b]$ sein Minimum $f(x_*)$ und sein Maximum $f(x^*)$ an.

Beweis (mit Hilfe von Theorem 2.1 (jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge)):

Beschränktheit

Theorem 3.10 (Beschränktheit)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gibt es ein $M > 0$ mit

$$f(x) \leq M \qquad \text{für alle } x \in [a, b],$$

d.h. f ist beschränkt.

Beweis: Folgt sofort aus Theorem 3.9.

3.2 Differenzierbare Funktionen

Motivation: Anstieg einer Gerade und Tangenten

- Grade: $y = m \cdot x + c$
  - Anstieg zwischen zwei Punkten (x_0, y_0) und (x_1, y_1):

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{(m \cdot x_1 + c) - (m \cdot x_0 + c)}{x_1 - x_0} = m$$

    (an jeder Stelle gleich)

- Funktion: $y = f(x)$
  - Anstieg zwischen zwei Punkten $(x_0, f(x_0))$ und $(x_1, f(x_1))$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

    (hängt i.A. von x_0 und x_0 ab)
  - Frage: Anstieg nahe bzw. an x_0 (d.h. $x_1 \to x_0$)?

$$\text{Existiert} \quad \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \overset{h = x_1 - x_0}{=} \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad ?$$

Definition der ersten Ableitung

Definition 3.11

Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in (a,b)$, $a < b$. f heißt differenzierbar an der Stelle $x_0 \in (a,b)$, wenn der Grenzwert

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. Dieser Limes heißt (erste) Ableitung (Differentialquotient) von f an der Stelle x_0 und wird mit $f'(x_0)$ bezeichnet:

$$f'(x_0) := \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

f heißt differenzierbar (auf (a,b)), wenn $f'(x_0)$ für alle $x_0 \in (a,b)$ existiert.
Ist f' stetig, so heißt f stetig differenzierbar.

Andere Bezeichnungen für $f'(x_0)$: $\dot{f}(x_0)$, $Df(x_0)$, $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$ (sprich: „$\mathrm{d}f$ nach $\mathrm{d}x$")

Beispiel 1

Erinnerung: $$f'(x_0) := \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \to x^2$ und $x_0 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x_0^2 + 2hx_0 + h^2 - x_0^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2hx_0 + h^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} 2x_0 + h \\ &= 2x_0 \end{aligned}$$

Beispiel 2

2. $g : [0,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{x}$ und $x_0 > 0$:

$$\begin{aligned}
g'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0})(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0})}{h\cdot(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x_0+h-x_0}{h\cdot(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h\cdot(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0})} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x_0}}
\end{aligned}$$

Beispiel 3

Erinnerung: $\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$

3. $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sin x$ und $x_0 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} k'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{k(x_0+h) - k(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x_0+h) - \sin x_0}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \end{aligned}$$

Differenzierbarkeit $\Rightarrow$ Stetigkeit

Theorem 3.12

Sei $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ eine Funktion. Dann gilt:

$$f \text{ in } x_0\in(a,b) \text{ differenzierbar} \qquad \Rightarrow \qquad f \text{ stetig in } x_0.$$

Beweis:

$$f(x) = \underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{\to f'(x_0)}\cdot\underbrace{(x-x_0)}_{\to 0} + f(x_0) \xrightarrow{x\to x_0} f(x_0). \qquad \square$$

Achtung: Umkehrung gilt nicht wie man an der Betragsfunktion $|x|$ sieht.

Rechenregeln I

Theorem 3.13

Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *und* $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *in* $x_0 \in (a,b)$ *differenzierbar. Dann gilt:*

1. *Linearität:* $(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$
2. *Produktregel:* $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$
3. *Quotientenregel: Mit* $g(x_0) \neq 0$ *gilt* $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \left(\frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}\right)(x_0)$.

Beweis:

1. $$\lim_{h\to 0} \frac{(\alpha f + \beta g)(x_0+h) - (\alpha f + \beta g)(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \alpha \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + \beta \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}$$
$$= \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$$

2. $$\frac{(f\cdot g)(x_0+h) - (f\cdot g)(x_0)}{h} = \frac{(f\cdot g)(x_0+h) - f(x_0)g(x_0+h) + f(x_0)g(x_0+h) - (f\cdot g)(x_0)}{h}$$

3. $$\frac{f(x_0+h)}{g(x_0+h)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \frac{f(x_0+h)g(x_0) - f(x_0)g(x_0+h)}{g(x_0)g(x_0+h)}$$ und dann wie in 2. □

Beispiele

1. $f(x) = 3x^2 - \sqrt{x}$ und $x_0 > 0$. Dann gilt $f'(x_0) = 6x_0 - \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$

2. $g(x) = \frac{x+1}{x^2+4}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
g'(x_0) &= \left(\frac{x+1}{x^2+4}\right)'(x_0)\\
&= \left(\frac{(x+1)'\cdot(x^2+4)-(x+1)\cdot(x^2+4)'}{(x^2+4)^2}\right)(x_0)\\
&= \left(\frac{x^2+4-(x+1)\cdot 2x}{(x^2+4)^2}\right)(x_0)\\
&= \left(\frac{-x^2-2x+4}{(x^2+4)^2}\right)(x_0)\\
&= \frac{-x_0^2-2x_0+4}{(x_0^2+4)^2}.
\end{aligned}$$

Rechenregeln II

Theorem 3.14 (Kettenregel)

Seien $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ *differenzierbar in* $x_0 \in (a,b)$ *und* $g : (c,d) \to \mathbb{R}$ *differenzierbar in* $f(x_0) \in (c,d)$. *Dann ist* $g \circ f$ *in* x_0 *differenzierbar mit*

$$(g \circ f)'(x_0) \quad = \quad g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Beweis: $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{g(f(x_0+h)) - g(f(x_0))}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{g(f(x_0+h)) - g(f(x_0))}{f(x_0+h) - f(x_0)} \cdot \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$ $\square$

Beispiel: $h(x) = \sqrt{x^2+4}$.

Mit $f(x) = x^2 + 4$ und $g(y) = \sqrt{y}$ gilt dann

$$h'(x_0) \quad = \quad g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) \quad = \quad \frac{1}{2\sqrt{x_0^2+4}} \cdot 2x_0 \quad = \quad \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+4}}.$$

Theorem 3.15 (Fermat, ca. 1638))

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *eine Funktion und* $x_0 \in (a,b)$ *sodass es ein* $\delta > 0$ *gibt mit*

1. *entweder* $f(x_0) \leq f(x)$ *oder* $f(x_0) \geq f(x)$ *für alle* $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$,
2. f *ist an* x_0 *differenzierbar.*

Dann gilt

$$f'(x_0) = 0.$$

Beweis: O.B.d.A. sei $f(x_0) \leq f(x)$ für alle $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.[1] Dann gilt

$$0 \leq \lim_{h\to 0, h>0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) \qquad \text{und} \qquad 0 \geq \lim_{h\to 0, h<0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0),$$

d.h.

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = 0.$$

□

[1] Sonst schaue $-f$ an.

Satz von Rolle

Theorem 3.16 (Satz von Rolle)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) = f(b)$ und in (a, b) differenzierbar. Dann gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$f'(\xi) = 0.$$

Beweis: 1. Fall: $f =$ const., d.h. $f' = 0$ auf $[a, b]$.
2. Fall: $f \neq$ const., d.h. es gilt o.B.d.A. $\sup_{x\in[a,b]} f(x) > f(a) = f(b)$.[2] Nach Min-Max-Theorem 3.9 existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit $f(\xi) = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$. Wegen Theorem 3.15 nach Fermat gilt dann $f'(\xi)$. □

Beispiel (Rolle 1690): Zwischen zwei Nullstellen eines Polynoms p befindet sich immer eine Stelle ξ mit

$$p'(\xi) = 0.$$

[2] Sonst nehme $-f$.

Mittelwertsatz und seine Folgen

Theorem 3.17 (Mittelwertsatz der Differentialrechnung)

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die in (a,b) differenzierbar ist. Dann gibt es ein $\xi \in (a,b)$ mit

$$f(b) - f(a) = f'(\xi) \cdot (b-a).$$

Beweis: Setze

$$\varphi(x) := f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x-a).$$

Dann gilt $\varphi(a) = \varphi(b)$ und nach dem Theorem 3.16 von Rolle gibt es ein $\xi \in (a,b)$ mit

$$0 = \varphi'(\xi) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

□

Corollary 3.18

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt: 1 $f' = 0$ *auf* $(a,b) \quad \Rightarrow \quad f = $ *const. auf* $[a,b]$.

2 $f' > 0$ *(bzw. $f' < 0$) auf* $(a,b) \quad \Rightarrow \quad f$ *ist monoton wachsend (bzw. fallend).*

3 $|f'(x)| \leq L$ *auf* $(a,b) \quad \Rightarrow \quad |f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$ *für all* $x_1, x_2 \in [a,b]$.

Ableitung von Umkehrfunktionen*

Theorem 3.19

Sei $f : (a,b) \to (c,d)$ eine stetige bijektive Funktion, die in $x_0 \in (a,b)$ differenzierbar ist mit $f'(x_0) \neq 0$. Dann ist die Umkehrfunktion $g = f^{-1} : (c,d) \to (a,b)$ in $y_0 := f(x_0)$ differenzierbar, und es gilt

$$g'(y_0) \quad = \quad \frac{1}{f'(g(y_0))}.$$

Beweis:

$$x = (g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad \Rightarrow \quad 1 = x' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

$$\Rightarrow \quad g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}. \qquad \square$$

Beispiel: $(\ln(y))' = y^{-1}$ auf $(0,\infty)$.

Setze $f(x) = \exp(x)$ und $g(y) = \ln(y)$, dann gilt

$$(\ln(y))' \quad = \quad g'(y) \quad = \quad \frac{1}{f'(g(y))} \quad = \quad \frac{1}{\exp(\ln(y))} \quad = \quad \frac{1}{y}.$$

Einige wichtige Funktionen und ihre Ableitungen

1. $f(x) = x^k$ mit $k \in \mathbb{N}$: $f'(x) = k \cdot x^{k-1}$
2. $f(x) = x^a$ mit $a \in \mathbb{R}$: $f'(x) = a \cdot x^{a-1}$
3. $f(x) = \sin x$: $f'(x) = \cos x$
4. $f(x) = \cos x$: $f'(x) = -\sin x$
5. $f(x) = e^x$: $f'(x) = e^x$
6. $f(x) = \log x$: $f'(x) = \frac{1}{x}$
7. $f(x) = \arcsin x$: $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
8. $f(x) = \arccos x$: $f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
9. $f(x) = \arctan x$: $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Höhere Ableitungen

Definition 3.20

Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine auf (a, b) differenzierbare Funktion. Ist f' in einem $x_0 \in (a, b)$ wieder differenzierbar, so heißt

$$f''(x_0) = (f')'(x_0)$$

die zweite Ableitung von f an $x_0 \in (a, b)$. Auf diese weise werden alle weiteren Ableitungen

$$f''' := (f'')', \quad f^{(4)} := (f''')', \quad \dots \quad f^{(k+1)} := \left(f^{(k)}\right)', \; \dots$$

definiert für $k \in \mathbb{N}$.

Beispiele: $f(x) = x^k$

$$\begin{aligned} f'(x) &= k \cdot x^{k-1}, & f''(x) &= k(k-1) \cdot x^{k-2} \\ f'''(x) &= k(k-1)(k-2) \cdot x^{k-3}, & &\dots \\ f^{(k)} &= k(k-1)(k-2)\dots 2 \cdot 1 = k!, & f^{(k+1)}(x) &= 0 \end{aligned}$$

3.3 Konvexe und Konkave Funktionen

Definition 3.21

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

1. f heißt konvex genau dann wenn für alle $x_1, x_2 \in [a, b]$ und $\lambda \in [0, 1]$ gilt
$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \quad \leq \quad \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$
2. f heißt konkav genau dann wenn $-f$ konvex ist.

Beispiel: $f(x) = x^2$ ist konvex.

Lemma 3.22

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ konvex. Dann gilt für alle $x_1, \ldots, x_n \in [a, b]$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in [0, 1]$ mit $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$ die Ungleichung

$$f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) \quad \leq \quad \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n).$$

Beweis: Folgt einfach aus der Definition mittels Induktion (siehe Skript Kosub S. 29).

Theorem 3.23

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. *f ist konvex.*
2. *f' ist monoton steigend.*

Beweis: Siehe Skript Kosub (S. 29–30).

Corollary 3.24

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. *f ist konvex.*
2. *$f'' \geq 0$.*

Corollary 3.25 (Jensen'sche Ungleichung)

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *konvex. Dann gilt für alle* $x_1, \ldots, x_n \in [a,b]$ *die Jensen'sche Ungleichung*

$$f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) \quad \leq \quad \frac{f(x_1) + \cdots + f(x_n)}{n}.$$

Beweis: Setze $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = \frac{1}{n}$ in Lemma 3.22. □

Corollary 3.26 (Ungleichung zum arithmetischen und geometrischen Mittel)

Für alle reelle Zahlen $x_1, \ldots, x_n \geq 0$ *gilt*

$$\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} \quad \leq \quad \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$

Beweis: $-\ln x$ ist konvex und mit der Jensen'schen Ungleichung gilt

$$-\ln \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \leq -\frac{\ln x_1 + \cdots + \ln x_n}{n} \quad \Rightarrow \quad \frac{\ln(x_1 \cdots x_n)}{n} \leq \ln \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$

Einsetzen in die monoton steigende $\exp$-Funktion gibt die Behauptung. □

Motzkin Polynom (1967)

Beispiel: Das Polynom

$$p(x,y) \quad = \quad 1 - 3x^2y^2 + x^2y^4 + x^4y^2$$

ist nicht-negativ auf $\mathbb{R}^2$.

Beweis: Setze

$$a = 1, \quad b = x^2y^4, \quad \text{und} \quad c = x^4y^2$$

in

$$\sqrt[3]{abc} \quad \leq \quad \frac{a+b+c}{3}$$

ein:

$$x^2y^2 = \sqrt[3]{1 \cdot x^2y^4 \cdot x^4y^2} \quad \leq \quad \frac{1 + x^2y^4 + x^4y^2}{3}$$

Cauchy–Schwarz'sche Ungleichung

Theorem 3.27 (Cauchy–Schwarz'sche Ungleichung)

Seien $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$. *Dann gilt*

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)^2 \quad \leq \quad \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right).$$

Beweis: Setze $X := \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ und $Y := \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}$. Mit $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$ aus Corollary 3.26 folgt

$$\begin{aligned} |x_1 y_1 + \dots + x_n y_n| \leq |x_1 y_1| + \dots + |x_n y_n| &= \sqrt{x_1^2 y_1^2} + \dots + \sqrt{x_n^2 y_n^2} \\ &= XY \cdot \left(\sqrt{x_1^2 X^{-2} y_1^2 Y^{-2}} + \dots + \sqrt{x_n^2 X^{-2} y_n^2 Y^{-2}}\right) \\ &\leq XY \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{X^2} + \frac{y_1^2 + \dots + y_n^2}{Y^2}\right) = XY. \end{aligned}$$

Quadrieren liefert die Behauptung. $\square$

3.4 Stammfunktionen

Definition 3.28

Eine differenzierbare Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt Stammfunktion einer Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, wenn

$$F'(x) = f(x)$$

für alle $x \in (a, b)$ gilt.

Beispiele:

1. $F(x) = \sin x$ ist Stammfunktion von $f(x) = \cos x$ auf $\mathbb{R}$
2. $F(x) = \frac{1}{k+1} x^{k+1} + 3$ ist Stammfunktion von $f(x) = x^k$ auf $\mathbb{R}$
3. $F(x) = \arcsin x - 7$ ist Stammfunktion von $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ auf $(-1, 1)$
4. $F(x) = e^x$ ist Stammfunktion von $f(x) = e^x$ auf $\mathbb{R}$
5. $F(x) = e^x + 21$ ist Stammfunktion von $f(x) = e^x$ auf $\mathbb{R}$

Theorem 3.29

Sind F_1 und F_2 zwei Stammfunktionen von f, so gilt

$$F_1 = F_2 + c$$

für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$.

Beweis: Setze

$$F := F_1 - F_2,$$

d.h.

$$F' = F_1' - F_2' = f - f = 0$$

und somit nach Corollary 3.18 ❶

$$F = c$$

für ein $c \in \mathbb{R}$. □

3.5 Integrale

Differenzieren ist Technik,
Integrieren ist Kunst.

Motivation

Ziel: Fläche unter einer Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$

Idee:

1. Zerlegung von $[a, b]$ in kleinere Intervalle $[x_i, x_{i+1}]$
2. Approximation der Fläche als Rechteck der Fläche $f(x_i) \cdot (x_{i+1} - x_i)$
3. Grenzwert $\max_i |x_{i+1} - x_i| \to 0$

Definition 3.30

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann heißt der Grenzwert

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad := \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{b-a}{n}\cdot k\right)\cdot\frac{b-a}{n}$$

das (bestimmte) Integral von f zwischen a und b.

Bemerkungen:

1. Da f stetig ist, existiert der Grenzwert.
2. Andere Unterteilungen (nicht notwendigerweise äquidistant) liefern den gleichen Grenzwert. Es reicht $\max_i |x_{i+1} - x_i| \to 0$.
3. a. Das Intervall $[a,b]$ heißt Integrationsintervall.
   b. a und b heißen Integrationsgrenzen.
   c. f heißt Integrand.
   d. x heißt Integrationsvariable.

Beispiel 1: $f(x) = x$ auf $[0,1]$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \quad := \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{b-a}{n}\cdot k\right)\cdot\frac{b-a}{n}}$$

Sei $f(x) = x$ auf $[0,1]$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\int_0^1 x\ \mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{n}\cdot k\right)\cdot\frac{1}{n}\\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1} k\\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\cdot\frac{(n-1)(n-2)}{2}\end{aligned}$$

$$\int_0^1 x\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

Beispiel 2: $f(x) = x^2$ auf $[0, b]$

Sei $f(x) = x^2$ auf $[0, b]$. Dann gilt

$$\int_0^b x^2 \, \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{b}{n} \cdot k\right)^2 \cdot \frac{b}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{b^3}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} k^2$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \cdot \frac{(n-1) \cdot n \cdot (2n-1)}{6}$$

$$\int_0^b x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{b^3}{3}.$$

Beispiel 3: $f(x) = e^x$ auf $[a,b]$

Sei $f(x) = e^x$ auf $[a,b]$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\int_0^b e^x \, \mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \exp\left(a + \frac{b-a}{n}\cdot k\right)\cdot\frac{b-a}{n}\\
&= \lim_{n\to\infty} e^a \cdot \frac{b-a}{n}\cdot \sum_{k=0}^{n-1} \exp\left(\frac{b-a}{n}\right)^k\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n}\cdot e^a \cdot \frac{\exp\left(\frac{b-a}{n}\right)^n - 1}{\exp\left(\frac{b-a}{n}\right) - 1}\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n}\cdot \frac{e^b - e^a}{\exp\left(\frac{b-a}{n}\right) - 1}\\
&= (e^b - e^a)\cdot \lim_{n\to\infty} \frac{h}{e^h - 1}
\end{aligned}$$

$$\int_a^b e^x \, \mathrm{d}x = e^b - e^a.$$

Theorem 3.31 (Rechenregeln für Integrale)

Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ zwei steige Funktionen. Dann gilt

1. *Linearität:* $\int_a^b (\alpha \cdot f(x) + g(x))\ \mathrm{d}x = \alpha \cdot \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x.$
2. *Intervallzerlegung,* $c \in (a,b)$*:* $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\ \mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\ \mathrm{d}x.$
3. *Grenzensymmetrie:* $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\ \mathrm{d}x.$
4. *Monotonie:* $f \leq g$ *auf* $[a,b] \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x.$
5. *Dreiecksungleichung:* $\left| \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \right| \leq \int_a^b |f(x)|\ \mathrm{d}x.$

Beweis: Über Definition $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{b-a}{n} \cdot k\right) \cdot \frac{b-a}{n}$. (TAFEL) □

Bemerkung: Mit (1) können wir Integrale über stückweise stetige Funktionen definieren.

Theorem 3.32

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $c \in [a,b]$. Dann wird durch $F(x) := \int_c^x f(t)\ \mathrm{d}t$ eine Stammfunktion geliefert. Es gilt also $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in (a,b)$.

Beweis: Wir haben zu zeigen $F'(x) = f(x)$. Sei $x \in (a,b)$. Dann gilt

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left(\int_c^{x+h} f(t)\ \mathrm{d}t - \int_c^x f(t)\ \mathrm{d}t \right) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\ \mathrm{d}t$$

und somit

$$\begin{aligned} |F'(x) - f(x)| &= \left| \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left(\int_x^{x+h} f(t)\ \mathrm{d}t - h \cdot f(x) \right) \right| = \left| \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) - f(x)\ \mathrm{d}t \right| \\ &\leq \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \int_x^{x+h} \sup_{t\in[x,x+h]} |f(t) - f(x)|\ \mathrm{d}t = \lim_{h\to 0} \sup_{t\in[x,x+h]} |f(t) - f(x)| = 0. \end{aligned}$$

□

Theorem 3.33 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI))

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f, dann gilt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad = \quad F(x)\big|_{x=a}^{b} := F(b) - F(a).$$

Beweis: Wir haben $F(x) = \displaystyle\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t + C$ für ein $c \in [a,b]$ und ein $C \in \mathbb{R}$ (Theorem 3.29 + 3.32). Dann gilt

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t + C - \int_c^a f(t)\,\mathrm{d}t - C \\ &= \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

□

Beispiele HDI, 1/2

HDI: $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad = \quad F(x)\Big|_{x=a}^{b} := F(b) - F(a)$$

1. $\displaystyle\int_{-1}^{2} x^4\,\mathrm{d}x =$

2. $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x =$

3. $\displaystyle\int_{1}^{e} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x =$

4. $\displaystyle\int_{0}^{3} 2x \cdot \exp(x^2)\,\mathrm{d}x =$

Beispiele HDI, 2/2

5. Um das Integral
$$\int_a^b \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$
mit $-1 \leq a, b \leq 1$ zu berechnen, müssen wir sehen, dass
$$F(x) = \frac{1}{2}\left(\arcsin x + x \cdot \sqrt{1-x^2}\right)$$
eine Stammfunktion von $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ ist. Dann erhalten wir z. B. für $a = 0$ und $b = 1$ das bestimmte Integral
$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\arcsin 1 - \arcsin 0) = \frac{\pi}{4}.$$

6. Die Fehlerfunktion $\operatorname{erf} : \mathbb{R} \to [-1,1]$ wird über das Integral definiert:
$$\operatorname{erf} x := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Partielle Integration

Idee: $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g' \quad \Rightarrow \quad f' \cdot g = (f \cdot g)' - f \cdot g'$

Theorem 3.34

Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ (stetig) differenzierbar. Dann gilt

$$\int_a^b f'(x) \cdot g(x)\, \mathrm{d}x \quad = \quad f(x) \cdot g(x)\Big|_{x=a}^{b} \quad - \quad \int_a^b f(x) \cdot g'(x)\, \mathrm{d}x.$$

Beweis:

$$f' \cdot g = (f \cdot g)' - f \cdot g' \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f'(x) \cdot g(x)\, \mathrm{d}x = f(x) \cdot g(x)\Big|_{x=a}^{b} - \int_a^b f(x) \cdot g'(x)\, \mathrm{d}x. \qquad \square$$

Beispiele für Partielle Integration

$$\int_a^b f'(x) \cdot g(x) \, \mathrm{d}x \quad = \quad f(x) \cdot g(x)\Big|_{x=a}^{b} \quad - \quad \int_a^b f(x) \cdot g'(x) \, \mathrm{d}x$$

1. $\displaystyle\int_0^\pi x \cdot \sin(x) \, \mathrm{d}x =$

Beispiele für Partielle Integration

$$\int_a^b f'(x) \cdot g(x) \, \mathrm{d}x \quad = \quad f(x) \cdot g(x)\Big|_{x=a}^{b} \quad - \quad \int_a^b f(x) \cdot g'(x) \, \mathrm{d}x$$

2. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin(x) \cdot \cos(x) \, \mathrm{d}x =$

Beispiele für Partielle Integration

$$\int f'(x) \cdot g(x) \, \mathrm{d}x \quad = \quad f(x) \cdot g(x) \quad - \quad \int f(x) \cdot g'(x) \, \mathrm{d}x$$

3. $\int \ln x \, \mathrm{d}x =$

Beispiele für Partielle Integration

$$\int f'(x) \cdot g(x)\ \mathrm{d}x \quad = \quad f(x) \cdot g(x) \quad - \quad \int f(x) \cdot g'(x)\ \mathrm{d}x$$

4. $\displaystyle\int \arcsin x\ \mathrm{d}x =$

Substitution / Variablentransformation

Idee 1: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ und $g : [\alpha,\beta] \to [a,b]$, dann $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Idee 2: $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y} \cdot \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

Theorem 3.35

Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $g : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ stetig differenzierbar, dann gilt

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\;\mathrm{d}y \quad = \quad \int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\;\mathrm{d}x.$$

Beweis: Wähle eine Stammfunktion F von f und setze $h := F \circ g$. Dann gilt

$$h'(x) = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

und durch Integration ergibt sich

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\;\mathrm{d}x = \int_a^b h'(x)\;\mathrm{d}x = h(x)\Big|_{x=a}^{b} = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\;\mathrm{d}y. \qquad \square$$

Beispiele für Substitution

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\ \mathrm{d}y \quad = \quad \int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\ \mathrm{d}x.$$

1. $\displaystyle\int_0^1 (1+x^2)^4 \cdot x\ \mathrm{d}x =$

Beispiele für Substitution

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\ \mathrm{d}y \quad = \quad \int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\ \mathrm{d}x.$$

2. $\displaystyle\int_0^2 x^2 \cdot \exp(x^3)\ \mathrm{d}x =$

Uneigentliche Integrale

Bisher: Integration von (stückweise) stetigen Funktionen auf $[a, b]$.

Theorem 3.36

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *stückweise stetig. Dann existiert* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *und ist endlich.*

Wir wollen nun folgende Abschwächungen bzw. Erweiterungen betrachten:

- f nicht stetig bzw. beschränkt auf $[a, b]$, z.B. $f(x) = \frac{1}{x}$ auf $[-1, 1]$
  - offene Intervalle $(a, b]$, $[a, b)$ und (a, b)
  - nicht stetig, z.B. Singularitäten
- unbeschränkte Intervalle
  - $(-\infty, b]$, $[a, \infty)$ und $(-\infty, \infty)$

Integration auf $[a, \infty)$ und $(-\infty, b]$

Definition 3.37

Sei $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ eine Funktion und für jedes $R > a$ sei die Einschränkung $f|_{[a,R]} : [a, R] \to \mathbb{R}$ integrierbar. Wenn $\int_a^R f(x)\,\mathrm{d}x$ für $R \to \infty$ existiert, dann ist f auf $[a, \infty)$ im uneigentlichen Sinne integrierbar und wir schreiben

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \quad := \quad \lim_{R\to\infty} \int_a^R f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Beispiele:

1. $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$. Dann gilt $\int_1^R \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(x)\big|_{x=1}^R = \ln(R)$. Da $\int_1^R \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(R) \to \infty$ für $R \to \infty$ ist f auf $[1, \infty)$ nicht uneigentlich integrierbar.
2. $g : [1, \infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{x^2}$. Dann gilt $\int_1^R \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{-1}{x}\big|_{x=1}^R = 1 - R^{-1}$. Da $\int_1^R \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = 1 - R^{-1} \to 1$ für $R \to \infty$ ist g auf $[1, \infty)$ im uneigentlichen Sinne integrierbar und es gilt

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \quad = \quad \lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \quad = \quad \lim_{R\to\infty} 1 - R^{-1} \quad = \quad 1.$$

Äquivalente Definition für $(-\infty, b]$:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\ \mathrm{d}x \quad := \quad \lim_{R \to -\infty} \int_{R}^{b} f(x)\ \mathrm{d}x.$$

Definition 3.38 (Integration über $\mathbb{R}$)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und für ein $c \in \mathbb{R}$ existieren die beiden Integrale

$$\int_{-\infty}^{c} f(x)\ \mathrm{d}x \qquad \text{und} \qquad \int_{c}^{\infty} f(x)$$

im uneigentlichen Sinne, dann existiert und gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ \mathrm{d}x \quad := \quad \int_{-\infty}^{c} f(x)\ \mathrm{d}x \quad + \quad \int_{c}^{\infty} f(x)\ \mathrm{d}x.$$

Integralvergleichskriterium für Reihen

Theorem 3.39

Sei $f : [1,\infty) \to [0,\infty)$ monoton fallend. Es gilt:

$$\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \text{ existiert} \qquad \Leftrightarrow \qquad \sum_{n=1}^\infty f(n) \text{ konvergiert.}$$

Beispiel:

Sei $f : [1,\infty) \to [0,\infty)$ mit $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \leq 0$. Es gilt

$$\sum_{n=1}^\infty n^\alpha \text{ konvergiert} \qquad \Leftrightarrow \qquad \int_1^\infty x^\alpha\,\mathrm{d}x \text{ exisistiert} \qquad \Leftrightarrow \qquad \alpha < -1.$$

Kapitel 4: Potenzreihen

Definition 4.40

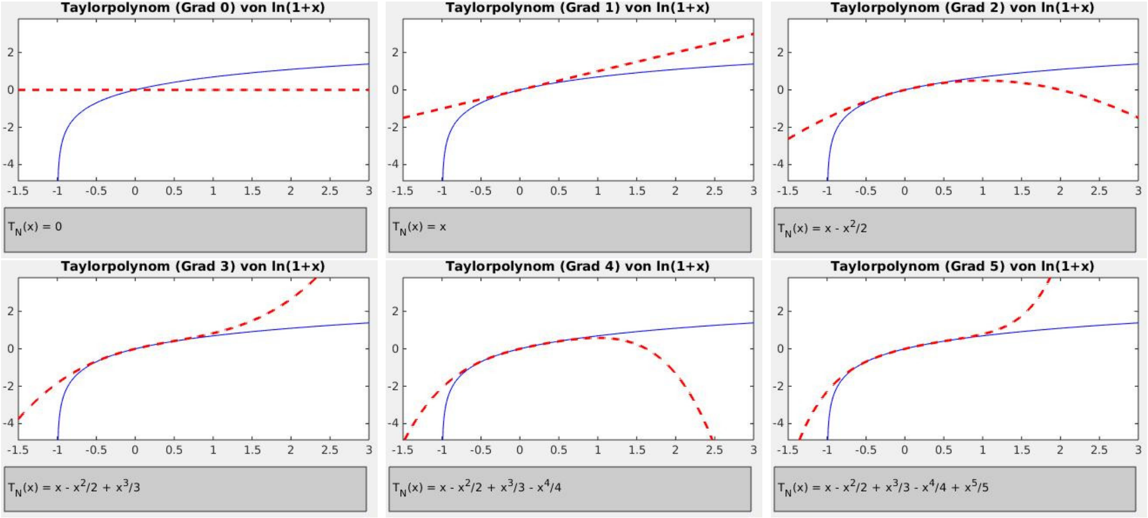
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge und $x_0, x \in \mathbb{R}$. Dann heißt

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n \qquad (*)$$

Potenzreihe in x um den Entwicklungspunkt x_0. $(*)$ sind Funktionen, definiert wenn $(*)$ für $x \in \mathbb{R}$ konvergiert.

- Expotentialreihe: $\exp(x) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}, \quad x \in \mathbb{R}$
- Sinus: $\sin(x) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \cdot x^{2j+1}}{(2j+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}$
- Cosinus: $\cos(x) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \cdot x^{2j}}{(2j)!}, \quad x \in \mathbb{R}$
- (natürlicher) Logarithmus: $\log(1+x) := \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} \frac{x^j}{j}, \quad x \in (-1, 1]$

$$f(x) = \ln(1+x) \qquad \text{vs.} \qquad \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} \frac{x^j}{j}$$



Theorem 4.41

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge und* $x_0 \in \mathbb{R}$. *Zu der Potenzreihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n$$

existiert ein Konvergenzradius $R \in [0, \infty]$ *mit*

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n$ *ist absolut konvergent für alle* $x \in \mathbb{R}$ *mit* $|x - x_0| < R$, *und*
2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n$ *ist divergent für alle* $x \in \mathbb{R}$ *mit* $|x - x_0| > R$.

Beweis: Folgt aus absoluter Konvergenz für Folgen $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = b_n(x) = a_n \cdot (x - x_0)$. □

Bemerkung: Eine allgemeine Aussage für $x - x_0 = \pm R$ ist nicht möglich.

Theorem 4.42

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und $x_0 \in \mathbb{R}$. Für die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n$$

gilt das folgende:

1. *Konvergiert (oder divergiert bestimmt) die Folge $\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$, so gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = R. \qquad \text{(Quotientenkriterium)}$$

2. *Konvergiert (oder divergiert bestimmt) die Folge $\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$, so gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = R. \qquad \text{(Wurzelkriterium)}$$

Beweis: Folgt aus absoluter Konvergenz für Folgen $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = b_n(x) = a_n \cdot (x - x_0)$. □

Beispiele für Konvergenzradien

1. $f(x) = \ln(1+x)$ vs. $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} \frac{x^j}{j}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} =$$

Beispiele für Konvergenzradien

2. $f(x) = \exp x = e^x$ vs. $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} =$$

Lemma 4.43

Sei $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \cdot x^n$ eine Potenzreihe ($x_0 = 0$) mit Konvergenzradius $R > 0$ und $a_n \neq 0$ für mindestens ein $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es ein $r \in (0, R)$ sodass f in $(-r, r)$ nur endlich viele Nullstellen hat.

Beweis: Siehe Skript Kosub, p. 38, Lemma 4.4. □

Theorem 4.44

Wenn es eine Folge $\{z_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ mit $z_i \to 0$ gibt für die die Reihe $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \cdot x^n$ konvergiert und null ist, so gilt $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis: Folgt sofort aus Lemma 4.43. □

Theorem 4.45 (Identitätssatz für Potenzreihen)

Wenn zwei Potenzreihen $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \cdot x^n$ und $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n \cdot x^n$ auf $(-r, r)$ konvergieren und auf einer Folge $\{z_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ mit $z_i \to 0$ übereinstimmen, so gilt $a_n = b_n$.

Beweis: $\sum_{n\in\mathbb{N}}(a_n - b_n)x^n$ erfüllt Theorem 4.44. □

Theorem 4.46 (Summe und Produkte)

Seien $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ und $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n x^n$ absolut konvergente Reihen auf $(-r,r)$ für ein $r>0$. Dann gilt, dass

1. $$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n + \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n x^n = \sum_{n\in\mathbb{N}} (a_n + b_n)\cdot x^n$$

2. $$\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n\right)\cdot\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n x^n\right) = \sum_{n,m\in\mathbb{N}} a_n b_m \cdot x^{n+m} = \sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)\cdot x^n \text{ (Cauchy Produkt)}$$

sind absolut konvergente Reihen auf $(-r,r)$.

Beweis: Für 1 gilt

$$\left|\sum_{n\in\mathbb{N}} (a_n + b_n)\cdot x^n\right| \le \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n + b_n|\cdot|x|^n \le \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|\cdot|x|^n + \sum_{n\in\mathbb{N}} |b_n|\cdot|x|^n < \infty$$

für alle $x\in(-r,r)$ und äquivalent für 2. □

Cauchy Produkt: Beispiel $\exp$

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$
\begin{aligned}
\exp(x) \cdot \exp(y) &= \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{y^j}{j!}\right) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{j} a_k \cdot b_{j-k}\right) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{j} \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{j-k}}{(j-k)!}\right) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(x+y)^j}{j!} \\
&= \exp(x+y).
\end{aligned}
$$

Substitution

Beispiel: Sei $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n y^n$ eine auf $(-r,r)$, $r>0$, absolut konvergente Reihe. Dann ist mit $y=x^2$ die Reihe

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n (x^2)^n = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^{2n}$$

absolut konvergent auf $(-\sqrt{r},\sqrt{r})$.

Beispiel: Wir haben

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} q^n = \frac{1}{1-q}$$

für alle $q\in(-1,1)$. Mit $q=-x^2$ gilt dann, dass

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \cdot x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}$$

gilt für alle $x\in(-1,1)$.

$$\boxed{\sqrt[n]{n} \xrightarrow{n\to\infty} 1}$$

Theorem 4.47 (Differenzieren von Potenzreihen)

Sei $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ *eine auf* $(-R, R)$, $R \geq 0$, *absolut konvergente Potenzreihe. Dann gilt, dass*

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n \cdot x^{n-1}$$

ist absolut konvergent auf $(-R, R)$ *und*

$$f'(x) = g(x)$$

für alle $x \in (-R, R)$.

Bemerkungen:

1. Da f' existiert, ist f auf $(-R, R)$ insbesondere stetig.
2. Da f' absolut konvergent ist auf $(-R, R)$ ergibt wiederholtes Anwenden des Theorems, dass alle $f^{(k)}$ absolut konvergent auf $(-R, R)$ sind.

Beispiel differenzieren von Potenzreihen: $(\exp x)' = \exp x$

$$
\begin{aligned}
(\exp x)' &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right)' \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot x^{n-1}}{n!} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad\qquad = \exp x
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\sqrt[n]{n+1} \quad \xrightarrow{n\to\infty} \quad 1}$$

Theorem 4.48 (Integrieren von Potenzreihen)

Sei $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ *eine auf* $(-R,R)$, $R \geq 0$, *absolut konvergente Potenzreihe. Dann gilt, dass*

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} \cdot x^{n+1} \quad = \quad \frac{a_0}{1}x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$$

ist absolut konvergent auf $(-R,R)$ *und*

$$g'(x) = f(x)$$

für alle $x \in (-R,R)$, *d.h.* $g = F$ *ist eine Stammfunktion von* f.

Bemerkungen:

1. Da F existiert, ist f auf $(-R,R)$ insbesondere stetig.
2. Da F absolut konvergent ist auf $(-R,R)$ ergibt wiederholtes Anwenden des Theorems, dass alle höheren Stammfunktionen $\int F \,\mathrm{d}x$ absolut konvergent auf $(-R,R)$ sind.

Beispiel Stammfunktion/Integral einer Potenzreihe: Die erf-Funktion

- $\exp x = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^n}{n!}$ auf $\mathbb{R}$
- $x = -t^2$: $\qquad \exp(-t^2) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n \cdot t^{2n}}{n!}$ auf $\mathbb{R}$
- $\operatorname{erf} x := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp(-t^2)\ \mathrm{d}t$

$$\int \exp(-x^2)\ \mathrm{d}x \quad = \quad \int \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot x^{2n}\ \mathrm{d}x \quad = \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{(2n+1)\cdot n!} \cdot x^{2n+1}$$

Berechnung von π

- $f(x) = \arctan x \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$
- $\dfrac{1}{1+x^2} = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \cdot x^{2n}$
- $\arctan x = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{(-1)^{n+1}}{2n+1} \cdot x^{2n+1}$
- Leibnitz (1682), Madhava ($\approx$ 1400), Gregory (1670er Jahre):

$$\frac{\pi}{4} = \arctan 1 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \pm \dots$$

aber: keine absolute Konvergenz!

- Machin (1706):

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$$

Taylorpolynome und -reihen: Motivation

- Beobachtung: Für $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ absolut konvergent auf $(-R, R)$, $R > 0$. Dann gilt
  - $f(0) = a_0$
  - $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot a_k \cdot x^{k-1}$, d.h. $f'(0) = a_1$
  - ...
  - $f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1) \cdot (k-n+1) \cdot x^{k-n}$, d.h. $f^{(n)}(0) = n! \cdot a_n$

  Zusammengefasst:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \qquad \text{und} \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n$$

- Frage: Für eine Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (beliebig differenzierbar), gilt dann

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n$$

  auf $(-r, r) \subseteq \mathbb{R}$ für ein $r \geq 0$?

Definition 4.49 (Taylorpolynom und Restglied)

Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ n-mal stetig differenzierbar. Dann ist das n-te Taylorpolynom T_{n,f,x_0} an der Stelle $x_0 \in (a,b)$ definiert als

$$T_{n,f,x_0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k.$$

Wir definieren das Restglied R_n als

$$R_n(x - x_0) := f(x) - T_{n,f,x_0}(x).$$

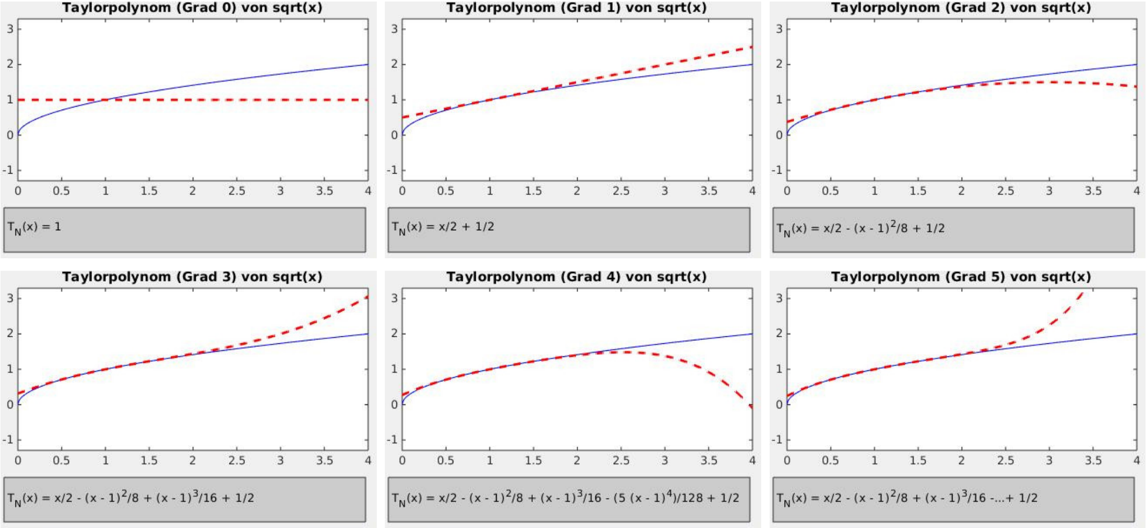
Theorem 4.50 (Lagrangesche Restgliedformel)

$f : (a,b) \to \mathbb{R}$ $(n+1)$-mal (stetig) differenzierbar, $x_0 \in (a,b)$. Für $x = x_0 + h \in (a,b)$ gibt es ein $\vartheta \in (0,1)$ mit

$$R_n(x - x_0) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \vartheta h)}{(n+1)!} h^{n+1}.$$

Es gibt weitere Restgliedformeln (Cauchys Restgliedformel, Integraldarstellungen).

$$f(x) = \sqrt{x},\ x_0 = 1 \ \Rightarrow\ f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2} \Rightarrow\ \ldots\ \Rightarrow\ f^{(n)}(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1-2}{2}\cdots\frac{1-2(n-1)}{2}\cdot x^{1/2-n}$$



ACHTUNG!!!

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist beliebig oft differenzierbar: $f^{(n)}(0)$ existiert für alle $n \in \mathbb{N}$
- $g(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n$ konvergiert absolut auf $\mathbb{R}$
- ABER:

$$f(x) \neq g(x) \qquad \text{für alle } x \neq 0$$

Beispiel:

$$f(x) = \exp\left(-x^{-2}\right)$$

- $f(0) = 0$
- $f^{(n)}(0) = 0$ für alle $n = 1, 2, 3, \ldots$
- ABER:

$$f(x) = \exp\left(-x^{-2}\right) \qquad \neq \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n = 1$$

Kapitel 5: Lineare Räume

5.1 Vektorräume

Literatur: G. Fischer + B. Springborn: Lineare Algebra - Eine Einführung für Studienanfänger, 19. Auflage, Springer-Verlag, 2020 (eBook frei über UniKN/Springer)

Definition 5.51

Sei K ein Körper.[3] Ein (linearer) K-Vektorraum ist eine Menge V mit zwei Operationen:

- $+ : V \times V \to V$, $(v, w) \mapsto v + w$
- $\cdot : K \times V \to V$, $(a, v) \mapsto a \cdot v$

sodass folgende Eigenschaften erfüllt sind:

1. $(V, +)$ ist eine abelsche Gruppe, d.h.
   a. $f + g = g + f$ für alle $f, g \in V$
   b. es gibt ein (eindeutiges) $e \in V$ mit $f + e = f$ für alle $f \in V$ (neutrales/Null-Element $e = 0$)
   c. für jedes $f \in V$ gibt es ein inverses Element $i = i(f)$ mit $f + i(f) = e$ (kurz: $i(f) = -f$).
2. Für alle $a, b \in K$ und alle $v, w \in V$ gilt:
   a. $(a + b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v$
   b. $a \cdot (v + w) = a \cdot v + a \cdot w$
   c. $(ab) \cdot v = a \cdot (b \cdot v)$
   d. $1 \cdot v = v$.

Die Elemente von V heißen Vektoren und die Elemente von K heißen Skalare.
Einen $\mathbb{R}$-Vektorraum nennen wir linearen Raum (über $\mathbb{R}$).

[3] Wir haben eine Addition $+ : K \times K \to K$ mit inverser Abbildung $- : K \times K \to K$; ein Eins-Element 1; ein Null-Element 0; eine Multiplikation $\cdot : K \times K \to K$ mit inverser Abbildung $\div : K \times K \setminus \{0\} \to K$. Für uns $K = \mathbb{R}$.

Beispiele für $\mathbb{R}$-Vektorräume

1. $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$: Polynome auf $\mathbb{R}^n$

Beispiele für $\mathbb{R}$-Vektorräume

2. $\mathbb{R}^n := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \,\middle|\, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$ für $n \in \mathbb{N}$

Beispiele für $\mathbb{R}$-Vektorräume

3. $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$: stetige Funktionen $f:[0,1]\to\mathbb{R}$

Definition 5.52

Sei V ein linearer Raum und $\emptyset \neq W \subseteq V$. Dann heißt W linearer Unterraum (von V) wenn gilt

1. $v + w \in W$ für alle $v, w \in W$
2. $a \cdot v \in W$ für alle $a \in \mathbb{R}$ und $v \in W$.

Beispiele:

1. Für $d \in \mathbb{N}_0$ ist $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]_{\leq d} := \{p \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n] \mid \deg p \leq d\}$ ein linearer Unterraum von $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$.

2. Für $n \in \mathbb{N}$ ist $V := \{(x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 0\}$ ein linearer Unterraum von $\mathbb{R}^n$.

3. Die Menge $S := \{f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}) \mid f(0) = 1\}$ ist kein linearer Unterraum von $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$.

Corollary 5.53

Jeder linearer Unterraum eines linearen Raumes ist ein linearer Raum.

Definition 5.54

Sei V ein linearer Raum und $v_1, \dots, v_n \in V$ Vektoren.

1. Der Vektor $w \in V$ heißt Linearkombination von $v_1, \dots, v_n$, wenn es Konstanten $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ gibt mit
$$w = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n.$$
2. Die Menge aller Linearkombinationen von $v_1, \dots, v_n$ heißt lineare Hülle (engl. span) von $v_1, \dots, v_n$ und wird mit $\operatorname{span}\{v_1, \dots, v_n\}$ oder $\operatorname{lin}\{v_1, \dots, v_n\}$ bezeichnet.

Lemma 5.55

Sei V ein linearer Raum und $v_1, \dots, v_n \in V$. Dann ist $\operatorname{lin}\{v_1, \dots, v_n\}$ ein linearer Unterraum von V.

Beweis: Nachrechnen der Unterraumkriterien aus Definition 5.52.

1. $v + w \in \operatorname{lin}\{v_1, \dots, v_n\}$ für alle $v, w \in \operatorname{lin}\{v_1, \dots, v_n\}$:
TAFEL
2. $a \cdot v \in \operatorname{lin}\{v_1, \dots, v_n\}$ für alle $v \in \operatorname{lin}\{v_1, \dots, v_n\}$ und $a \in \mathbb{R}$:
TAFEL

□

Erzeugendensystem

Definition 5.56

Sei V ein linearer Raum. Eine Menge $v_1, \ldots, v_n \in V$ heißt Erzeugendensystem von V genau dann wenn

$$\operatorname{lin}\{v_1, \ldots, v_n\} = V.$$

Beispiele:

1. Die Vektoren $v_0 = 1, v_1 = x, v_2 = x^2, \ldots, v_n = x^d$ erzeugen $\mathbb{R}[x]_{\leq d}$.
2. Die Vektoren $v_1 = \binom{1}{0}$, $v_2 = \binom{0}{1}$ und $v_3 = \binom{1}{1}$ erzeugen $\mathbb{R}^2$.
3. Die Vektoren $v_1 = \binom{1}{0}$ und $v_2 = \binom{0}{1}$ erzeugen $\mathbb{R}^2$.

Lineare (Un-)Abhängigkeit

Definition 5.57

Sei V ein linearer Raum.

1. Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$ heißen linear unabhängig, falls für alle $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

2. Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$, die nicht linear unabhängig sind, heißen linear abhängig.

Beispiele:

1. Die Vektoren $v_0 = 1$, $v_1 = x$, $v_2 = x^2$, $\ldots$, $v_d = x^d$ sind linear unabhängig.
2. Die Vektoren $v_1 = \binom{1}{0}$, $v_2 = \binom{0}{1}$ und $v_3 = \binom{1}{1}$ sind linear abhängig.
3. Die Vektoren $v_1 = \binom{1}{0}$ und $v_2 = \binom{0}{1}$ sind linear unabhängig.

Basis

Definition 5.58

Sei V ein linearer Raum und $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ein Erzeugendensystem von V. Dann heißt die Menge $\{v_1, \ldots, v_n\}$ Basis von V genau dann wenn $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig sind. Die Vektoren v_i heißen Basisvektoren.

Beispiele:

1. Die Vektoren $v_0 = 1$, $v_1 = x$, $v_2 = x^2$, $\ldots$, $v_d = x^d$ sind eine Basis von $\mathbb{R}[x]_{\leq d}$.
2. Die Vektoren $v_1 = \binom{1}{0}$, $v_2 = \binom{0}{1}$ und $v_3 = \binom{1}{1}$ sind keine Basis von $\mathbb{R}^2$.
3. Die Vektoren $v_1 = \binom{1}{0}$ und $v_2 = \binom{0}{1}$ sind eine Basis von $\mathbb{R}^2$.

Austauschlemma

Lemma 5.59

Seien V ein linearer Raum und $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V. Dann gilt:

1. $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ *ist keine Erzeugendensystem.*
2. $\{v_1, \ldots, v_n, w\}$ *ist für jedes $w \in V$ linear abhängig.*
3. *Jeder Vektor $v \in V$ ist eindeutig als Linearkombination von $v_1, \ldots, v_n$ darstellbar.*

Lemma 5.60 (Austauschlemma)

Es seien V ein linearer Raum, $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V und $w \in V$ ein Vektor mit $w = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Dann ist auch

$$\{v_1, \ldots, v_{i-1}, w, v_{i+1}, \ldots, v_n\}$$

eine Basis von V für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ mit $\lambda_i \neq 0$.

Beweis: TAFEL □

Austauschsatz von Steinitz und Dimension eines linearen Raumes

Theorem 5.61

Es seien V ein linearer Raum, $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V und $w_1, \ldots, w_m \in V$ linear unabhängige Vektoren. Dann gilt:

1. $m \leq n$.
2. *Es gibt $i_1, \ldots, i_m \in \{1, \ldots, n\}$, sodass nach Austausch von v_{i_1} gegen w_1 bis v_{i_m} gegen w_m wieder eine Basis von V entsteht.*

Beweis: TAFEL □

Corollary 5.62

Je zwei endliche Basen eines linear Raumes besitzen die gleiche Anzahl an Basisvektoren.

Definition 5.63

Die Dimension $\dim V$ eines linear Raumes V ist definiert als die Anzahl der Elemente in einer Basis $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$:

$$\dim V := |B| = n.$$

Skalarprodukt

Definition 5.64

Es sei V ein linear Raum. Eine Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$$

heißt (euklidisches) Skalarprodukt, falls für alle $u, v, w \in V$ und $a \in \mathbb{R}$ gilt:

1. $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$ (Symmetrie)
2. $\langle av + w, u \rangle = a \cdot \langle v, u \rangle + \langle w, u \rangle$ (Linearität)
3. $\langle v, v \rangle \geq 0$ und $\langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$ (positive Definitheit)

Ein linearer Raum mit einem Skalarprodukt heißt euklidischer Raum. Vektoren v und w in einem euklidischen Raum mit $\langle v, w \rangle = 0$ heißen orthogonal (zueinander).

Theorem 5.65

Sind zwei Vektoren $v, w \in V \setminus \{0\}$ aus einem Vektorraum V orthogonal, dann sind sie linear unabhängig.

Beweis: TAFEL. □

Definition 5.66

Sei V ein euklidischer Raum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Wir definieren die Norm $\|\cdot\|$ auf V durch

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

Corollary 5.67

Sei V ein euklidischer Raum. Dann gilt für alle $v, w \in V$:

1. $\|v+w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\langle v, w \rangle$ *(Satz von Pythagoras)*
2. $\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2)$ *(Parallelogrammgleichung)*

Beweis: TAFEL. □

Corollary 5.68 (Cauchy–Schwarz Ungleichung)

Sei V ein euklidischer Raum. Dann gilt für alle Vektoren $v, w \in V$

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|.$$

Beweis: TAFEL. □

Definition 5.69

Sei V ein euklidischer Raum und $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von V.

1. B heißt Orthogonalbasis von V, wenn $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ für alle $i \neq j$ gilt.
2. B heißt Orhonormalbasis von V, wenn B eine Orthogonalbasis ist und $\|v_i\| = 1$ gilt für alle i.

Theorem 5.70

Jeder endlich-dimensionale euklische Raum besitzt eine Orthonormalbasis.

Beweis: TAFEL. □

Kapitel 6: Lineare Abbildungen

6.1 Definition

Definition 6.71

Seien V und W K-Vektorräume. Eine Abbildung $f : V \to W$ heißt linear, wenn

1. $f(v + w) = f(v) + f(w)$ und
2. $f(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot f(v)$

gilt für alle $v, w \in V$ und $\lambda \in K$.

Theorem 6.72

Sei $f : V \to W$ linear mit V und W Vektorräume. Dann gilt:

1. $f(0) = 0$.
2. *Sind $f(v_1), \dots, f(v_n)$ linear unabhängig in W, so sind $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig in V.*
3. *Ist $U \subseteq V$ ein Unterraum, so ist $f(U) \subseteq W$ ein Unterraum von W.*
4. *Ist $U \subseteq W$ ein Unterraum, so ist $f^{-1}(U) \subseteq V$ ein Unterraum von V.*
5. $\dim f(V) \leq \dim V$.

Beweis: TAFEL. □

Definition 6.73

Sei $f : V \to W$ eine linear Abbildung zwischen Vektorräumen. Wir definieren den Kern von f als

$$\ker f := \{v \in V \mid f(v) = 0\} = f^{-1}(0)$$

und das Bild von f als $$\operatorname{im} f := \{f(v) \mid v \in V\} = f(V).$$

Theorem 6.74

Sei $f : V \to W$ eine linear Abbildung zwischen Vektorräumen V und W. Dann gilt:

$$\ker f = \{0\} \qquad \Leftrightarrow \qquad f \text{ ist injektiv.}$$

Beweis: TAFEL. □

Theorem 6.75 (Dimensionsformel)

Sei $f : V \to W$ eine linear Abbildung und $\dim V < \infty$. Dann gilt

$$\dim V = \dim \operatorname{im} f + \dim \ker f.$$

Beweis: TAFEL. □

Corollary 6.76

Sei $f : V \to V$ eine linear Abbildung mit V ein endlich-dimensionaler Vektorraum. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. *f ist bijektiv.*
2. *f ist injektiv.*
3. *f ist surjektiv.*

Beweis:

Bijektion von f ist gleichbedeutend mit $\dim \operatorname{im} f = \dim V$. Somit ergeben sich alle Äquivalenzen aus der Dimensionsformel (Theorem 6.75). □

Matrix:

$$A = (a_{i,j})_{i=1,\dots,m;j=1,\dots,n} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} \quad \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

Rechenoperationen:

1. $A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})^n_{i=1,\dots,m;j=1,\dots,n}$
2. $\lambda \cdot A = (\lambda \cdot a_{i,j})^n_{i=1,\dots,m;j=1,\dots,n}$
3. $A = (a_{i,j})_{i=1,\dots,m;j=1,\dots,n}$ und $B = (b_{i,j})_{i=1,\dots,n;j=1,\dots,p}$:

$$A \cdot B = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}\right)_{i=1,\dots,m;j=1,\dots,p}$$

Lemma 6.77

Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Dann ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $v \mapsto Av$ linear.

Beweis: Übungsaufgabe. □

Beispiel: V mit Basis $\{v_1, v_2, v_3\}$ und W mit Basis $\{w_1, w_2\}$. Abbildung $f : V \to W$ gegeben durch

$$f(v_1) = 2w_1 + w_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad f(v_2) = -w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad f(v_3) = w_1 + 3w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

D.h. für $v = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ bekommen wir

$$\begin{aligned} f(v) &= f(a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3) = a_1 f(v_1) + a_2 f(v_2) + a_3 f(v_3) \\ &= a_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + a_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + a_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad f = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Theorem 6.78

Sei V mit Basis $\mathcal{A} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ und W mit Basis $\mathcal{B} = \{w_1, \ldots, w_m\}$ $\mathbb{R}$-Vektorräume. Dann gibt es zu jeder linearen Abbildung $f : V \to W$ eine eindeutig bestimmte Matrix

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(f) = (a_{i,j})_{i=1,\ldots,m;j=1,\ldots,n}$$

mit

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{i,j} w_i.$$

$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(f)$ heißt die darstellende Matrix bezüglich der Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$.

Beweis: TAFEL. □

id - identische Abbildung/Identität: $\mathrm{id}(v) = v$.

Corollary 6.79

Sei V mit Basen $\mathcal{A} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ und $\tilde{\mathcal{A}} = \{\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_n\}$ und sei W mit Basen $\mathcal{B} = \{w_1, \ldots, w_m\}$ und $\tilde{\mathcal{B}} = \{\tilde{w}_1, \ldots, \tilde{w}_m\}$. Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann gilt

$$\mathcal{M}_{\tilde{\mathcal{B}}}^{\tilde{\mathcal{A}}}(f) = \mathcal{M}_{\tilde{\mathcal{B}}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}) \cdot \mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(f) \cdot \mathcal{M}_{\mathcal{A}}^{\tilde{\mathcal{A}}}(\mathrm{id})$$

und

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\tilde{\mathcal{B}}}(\mathrm{id}) = \mathcal{M}_{\tilde{\mathcal{B}}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id})^{-1}.$$

Hauptwerkzeug: Inverse A^{-1} einer quadratischen (d.h. $m = n$) Matrix A

Berechnen einer Inversen mit dem Gauß–Jordan Algorithmus (TAFEL)

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$:

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$:

c) $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$:

Bemerkung: A^{-1} existiert nicht für jede quadratische Matrix A!

d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$:

Theorem 6.80

Der Gauß–Jordan Algorithmus ist korrekt.

Beweis: TAFEL □

Einheitsmatrix:

$$\mathbb{1} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

Definition 6.81

Sei $A = (a_{i,j})_{i=1,\dots,n;j=1,\dots,m}$ eine Matrix. Wir definieren:

1. A heißt quadratisch, falls $m = n$ gilt.
2. Die Matrix $A^T := (a_{j,i})_{j=1,\dots,m;i=1,\dots,n}$ heißt transponierte Matrix von A.
3. Die Matrix A heißt invertierbar, wenn A^{-1} existiert: $A^{-1}A = AA^{-1} = \mathbb{1}$.
4. A heißt symmetrisch, falls $A = A^T$.
5. A heißt orthogonal, falls $A^{-1} = A^T$.

Beispiel: $A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ist orthogonal.

Definition 6.82

Sei $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n) = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

1. Der Spaltenrang von A ist definiert als $\dim \operatorname{lin} \{a_1, \ldots, a_n\}$.
2. Der Zeilenrang von A ist definiert als $\dim \operatorname{lin} \{b_1, \ldots, b_m\}$.

Beispiele: a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

Theorem 6.83

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Dann gilt Spaltenrang = Zeilenrang.

Definition 6.84

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Dann ist $\operatorname{rank} A :=$ Spaltenrang = Zeilenrang.

Theorem 6.85

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. A *ist invertierbar.*
2. A^T *ist invertierbar.*
3. $\operatorname{rank} A = n$.
4. $\operatorname{rank} A^T = n$.

Beweis:

Definition 6.86

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Wir definieren die Determinante durch

$$\det A := \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$$

mit

- S_n = Menge aller Bijektionen $\sigma : \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\}$ (Permutationen),
- $F(\sigma) := \{(j,k) \mid j < k,\ \sigma j > \sigma k\}$, d.h. $F(\sigma)$ ist gerade die Anzahl der Fehlstände von σ,
- $\operatorname{sgn}\sigma := (-1)^{|F(\sigma)|}$.

Beispiele: (a) $\det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} = (+1)\cdot a_{1,1}a_{2,2} + (-1)a_{1,2}a_{2,1}$

(b)
$$\det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} = (+1)a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + (+1)a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + (+1)a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2}$$
$$+ (-1)a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} + (-1)a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1} + (-1)a_{2,1}a_{2,1}a_{3,3}$$

Theorem 6.87 (Entwicklungssatz von Laplace)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Setze

$$A_{-i,-j} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)} \text{ Matrix durch Streichen der } i\text{ten Zeile und } j\text{ten Spalte.}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \cdot \det A_{-i,-j} && \text{(Entwicklung nach der } i\text{ten Zeile)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \cdot \det A_{-i,-j} && \text{(Entwicklung nach der } j\text{ten Spalte)} \end{aligned}$$

Beispiel: TAFEL

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Effektives Berechnen von Determinanten I

Theorem 6.88

Sei

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Dann gilt

$$\det A = a_{1,1} \cdot a_{2,2} \cdots a_{n,n}.$$

Beweis: Zeilen-/Spaltenentwicklung. □

Beispiel:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

Effektives Berechnen von Determinanten II

Theorem 6.89

Sei $A = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *und* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Dann gilt*

a) $\det(a_1, \ldots, a_{j-1}, \lambda a_j, a_{j+1}, \ldots a_n) = \lambda \cdot \det(a_1, \ldots, a_n)$

b) $\det(a_1, \ldots, a_j, \ldots, a_{j'}, \ldots, a_n) = -\det(a_1, \ldots, a_{j'}, \ldots, a_j, \ldots, a_n)$

c) $\det(a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j + \lambda a_{j'}, a_{j+1}, \ldots, a_n) = \det(a_1, \ldots, a_n)$

und die gleichen Rechenregeln auch für die Zeilen.

Anwendung: Gaußverfahren in der Determinantenberechnung (Matrix auf obere Dreiecksgestalt bringen!)

Effektives Berechnen von Determinanten III

Theorem 6.90

Sei $A_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}, A_2 \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}, \dots, A_k \in \mathbb{R}^{n_k \times n_k}$ *und*

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n_1 + \dots + n_k) \times (n_1 + \dots + n_k)}.$$

Dann gilt

$$\det A = \det A_1 \cdot \det A_2 \cdots \det A_k.$$

Theorem 6.91

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$*. Dann gilt*

$$\det A = \det A^T.$$

weitere Eigenschaften von Determinanten

Theorem 6.92

Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Dann gilt:

1. A *ist invertierbar* $\Leftrightarrow \det A \neq 0$.
2. $\det A = \det A^T$.
3. $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.
4. $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$, *falls* A *invertierbar ist.*

Kapitel 7: Eigenräume

7.0 Motivation