Hausaufgabenblatt 8

Aufgabe 8.1 (Lineare Unabhängigkeit II)**.** Zeigen Sie, dass die Vektoren

$$v_1 = 1, \qquad v_2 = x \qquad \text{und} \qquad v_3 = \sin x$$

aus dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ linear unabhängig sind.

Aufgabe 8.2 (Skalarprodukt)**.** Sei $d \in \mathbb{N}_0$ und

$$V = \mathbb{R}[x]_{\leq d} = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_d x^d \mid a_0, a_1, \ldots, a_d \in \mathbb{R}\}$$

mit

$$\langle\, \cdot\,,\, \cdot\, \rangle : V \times V \to \mathbb{R}, \quad (f,g) \mapsto \langle f, g \rangle := \int_{-1}^{1} f(x) \cdot g(x) \; \mathrm{d}x. \tag{1}$$

Zeigen Sie:

a) Die Abbildung $\langle\, \cdot\,,\, \cdot\, \rangle$ in (1) ist ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}[x]_{\leq d}$.

b) Zeigen Sie, dass die Vektoren

$$v_1 = 1, \qquad v_2 = x, \qquad \text{und} \qquad v_2 = 5x^3 - 3x$$

orthogonal zueinander sind.

Aufgabe 8.3 (Winkel zwischen Vektoren)**.** Seien

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

in $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt. Wie groß ist der Winke zwischen v_1 und v_2?

Aufgabe 8.4 (Lineare Abbildungen)**.** Welche der folgenden Abbildungen sind linear, welche nicht? Beweisen Sie.

a) $a : C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto f(1)$.

b) $b : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \mapsto (x - z, y + z - 1)$.

c) $c : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$, $p \mapsto c(p) := \int_2^5 p(x) \; \mathrm{d}x$.