
Hausaufgabenblatt 4

Hinweis:

$$(\ln x)' = x^{-1} \quad (x > 0), \quad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1)$$

Aufgabe 4.1 (Zwischenwertsatz). Zeigen Sie, dass eine stetige Funktion

$$f : [a, b] \rightarrow [a, b]$$

mit $a < b$ besitzt einen Fixpunkt, d.h. es gibt ein $\tilde{x} \in [a, b]$ mit $f(\tilde{x}) = \tilde{x}$.

(Hinweis: Schauen Sie sich die Funktion $h(x) := f(x) - x$ an.)

Aufgabe 4.2 (Produktregel). Berechnen Sie die Ableitungen folgender Funktionen.

- a) $a(x) = x^2 \cdot \ln x$ für $x > 0$,
- b) $b(x) = \arcsin x \cdot \sin x$ für $-1 < x < 1$, und
- c) $c(x) = x^4 \cdot \ln x \cdot \sin x \cdot \cos x$ für $x > 0$.

Aufgabe 4.3 (Quotientenregel). Berechnen Sie die Ableitungen folgender Funktionen.

- a) $d(x) = \tan x$ auf dem Definitionsbereich von \tan ,
- b) $e(x) = \frac{x+1}{x-1}$ für $x \neq 1$, und
- c) $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$

Aufgabe 4.4 (Kettenregel). Berechnen Sie die Ableitungen folgender Funktionen.

- a) $g(x) = \sqrt{x \cdot \sqrt{x}}$ für $x > 0$,
- b) $h(x) = \ln(1 + e^{\arcsin x})$ für $-1 < x < 1$ und
- c) $i(x) = x^x$ für $x > 0$.