Hausaufgabenblatt 3 (Lösungen)

Aufgabe 3.1 (Reihen I).

a) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{5^n}(x-2)^n? \tag{1}$$

***Lösung*:** Damit die Reihe konvergiert, muss nach dem Wurzel- oder Quotientenkriterium $\left|\frac{1}{5}(x-2)\right| < 1$ sein. Somit $|x-2| < 5$, d.h. $-5 < x-2 < 5$ und damit

$$x \in (-3, 7).$$

b) Wenn die Reihe (1) für ein $x \in \mathbb{R}$ konvergiert, wie ist der Wert der Reihe (1)?

***Lösung*:** Mit $q = \frac{x-2}{5}$ bekommen wir

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{5^n}(x-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-2}{5}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{x-2}{5}} = \frac{5}{7-x}$$

für alle $x \in (-3, 7)$.

Aufgabe 3.2 (Reihen II). Welche Reihen sind (absolut) konvergent? Welche (bestimmt) divergent? Begründen Sie. Berechnen Sie keine Grenzwerte.

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt[3]{n}$

***Lösung*:** Da $\sqrt[3]{n} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$ gilt, ist $\sqrt[3]{n}$ keine Nullfolge und damit ist die Summe nicht konvergent (notwendiges Kriterium nicht erfüllt).

b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i^3}$

***Lösung*:** $\frac{1}{i^3}$ ist eine monoton fallende Nullfolge und somit konvergiert die alternierende Reihe nach Leibniz. Die Reihe konvergiert auch absolut nach dem Majorantenkriterium mittels ζ-Funktion.

c) $\displaystyle\sum_{k=10}^{\infty} \left(\frac{2k}{3k+1}\right)^k$

***Lösung*:** Es gilt $0 < \frac{2k}{3k+1} \leq \frac{2}{3}$ und die geometrische Reihe mit $q = \frac{2}{3}$ dient als konvergente Majorante.

d) $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \left(\sqrt{j} - \sqrt{j-1}\right)$

***Lösung*:** Es gilt

$$\sum_{j=1}^{n}(\sqrt{j} - \sqrt{j-1}) = \sqrt{1} - \sqrt{0} + \sqrt{2} - \sqrt{1} + \cdots + \sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \sqrt{n} \xrightarrow{n\to\infty} \infty,$$

d.h. die Partialsummen divergieren und somit auch die Summe.

Aufgabe 3.3 (Reihen III)**.** Welche Reihen sind (absolut) konvergent? Welche (bestimmt) divergent? Begründen Sie. Berechnen Sie keine Grenzwerte.

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{5^{2k}}$

***Lösung*:** Quotientenkriterium

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\frac{2}{5^{2k+2}}}{\frac{2}{5^{2k}}} = \frac{1}{5^2} < 1$$

und somit absolut konvergent.

b) $\displaystyle\sum_{d=0}^{\infty} \frac{7}{(4d)!}$

***Lösung*:** Mittels Quotientenkriterium gilt

$$\frac{a_{d+1}}{a_d} = \frac{\frac{7}{(4d+4)!}}{\frac{7}{(4d)!}} = \frac{(4d)!}{(4d+4)!} = \frac{1}{(4d)(4d+1)(4d+2)(4d+3)(4d+4)} \to 0$$

und somit absolute Konvergenz.

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^{3k}}{5^{2k}}$

***Lösung*:** Da $\frac{3^{3k}}{5^{2k}} = \left(\frac{27}{25}\right)^k \to \infty$, d.h. keine Nullfolge, Summe divergiert $\to \infty$.

d) $\sum_{j=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{j}}\right)$

***Lösung*:** $1-\frac{1}{\sqrt{j}} \to 1$ ist keine Nullfolge. Damit keine Konvergenz.

Aufgabe 3.4 (Stetigkeit I)**.** Sei $f(x) = x^3$. Zeigen Sie mit Hilfe der ε-δ-Definition von Stetigkeit, dass f stetig in $x_0 = 0$ ist.
***Lösung*:** Für $\varepsilon > 0$ wähle $\delta = \sqrt[3]{\varepsilon}$. Somit haben wir für alle $x \in (-\delta, \delta)$

$$|x_0^3 - x^3| = |x|^3 \leq \delta^3 = \varepsilon.$$

Aufgabe 3.5 (Stetigkeit II)**.** Die Funktion

$$h(x) = \operatorname{sign} x := \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

ist nicht auf ganz $\mathbb{R}$ stetig. Wo ist sie überall stetig und wo genau nicht? Zeigen Sie dies mit Hilfe der Definition Stetigkeit mittels Folgen.

***Lösung*:** Die Funktion h ist auf dem Intervall $(-\infty, 0)$ konstant -1 und auf dem Intervall $(0, \infty)$ konstant 1 und daher hier stetig. Es reicht $x_0 = 0$ zu untersuchen. Wähle $x_n = \frac{1}{n}$ und $y_n = -\frac{1}{n}$. Dann gilt

$$h(x_n) = \operatorname{sign} \frac{1}{n} = 1 \to 1$$

und

$$h(y_n) = \operatorname{sign} -\frac{1}{n} = -1 \to -1.$$

Damit haben wir zwei Folgen $x_n, y_n \to 0$ gefunden für die $h(x_n) \to a$ und $h(y_n) \to b$ gilt mit $a \neq b$. h ist also an $x_0 = 0$ nicht stetig. Das hier $h(0) = 0$ definiert ist/gilt, spielt keine Rolle.