Hausaufgabenblatt 1 (Lösungen)

Aufgabe 1.1 (Reele Zahlen)**.** Berechnen Sie per Hand:

a) $\ln(e^3)$ b) $\log_{10}(100)$ c) $\log_2(64)$ d) $\log_2(\frac{1}{64})$ e) $\log_{1/2}(64)$

Lösung: Mittels log-Gesetzen berechnen wir:

a) $\ln(e^3) = 3\ln(e) = 3$

b) $\log_{10}(100) = \log_{10}(10^2) = 2\log_{10}(10) = 2$

c) $\log_2(64) = \log_2(2^7) = 7\log_2(2) = 7$

d) $\log_2(\frac{1}{64}) = \log_2(2^{-7}) = -7\log_2(2) = -7$

e) $\log_{1/2}(64) = \frac{\ln 64}{\ln(1/2)} = \frac{\ln 64}{\ln 2^{-1}} = \frac{\ln 64}{-\ln 2} = -\log_2 64 = -7$

Aufgabe 1.2 (Grenzwerte I)**.** Sei

$$a_n = 2 - \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}.$$

Bestimmen Sie den Grenzwert $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a$ und beweisen Sie diesen mit der Grenzwertdefinition, d.h. finden Sie für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0 = n_0(\varepsilon)$ so dass

$$n \geq n_0 \qquad \Rightarrow \qquad |a - a_n| < \varepsilon$$

gilt.

Lösung: Vermutung: $a_n \to 2$. Nebenrechnung:

$$\begin{aligned}
\varepsilon > |2 - a_n| = \left|2 - 2 + \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}\right| &= \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}} && |(\,\cdot\,)^3\\
\varepsilon^3 &> \frac{1}{n+1} && |\cdot(n+1) \div \varepsilon^3\\
n+1 &> \frac{1}{\varepsilon^3}\\
n &> \frac{1}{\varepsilon^3} \quad \Rightarrow \quad \text{Vermutung: } n_0(\varepsilon) = \varepsilon^{-3}.
\end{aligned}$$

Testen wir nun die Vermutung. Sei also $n > n_0(\varepsilon) = \varepsilon^{-3}$ für $\varepsilon > 0$. Dann folgt:

$$|a - a_n| = \left|2 - 2 + \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}\right| = \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{n}} < \frac{1}{\sqrt[3]{\varepsilon^{-3}}} = \varepsilon.$$

Damit gilt also für jedes $\varepsilon > 0$ dass wenn $n \geq n_0(\varepsilon)$ ist, dann folgt $|a - a_n| < \varepsilon$, und somit gilt $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a = 2$.

Aufgabe 1.3 (Grenzwerte II)**.** Sei

$$a_n = -1 + \frac{4}{n^2+1}.$$

Bestimmen Sie den Grenzwert $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a$ und beweisen Sie diesen mit der Grenzwertdefinition.

Lösung: Vermutung: $a_n \to -1$. Nebenrechnung:

$$|a_n - (-1)| = \frac{4}{n^2+1} < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{\varepsilon} < n^2+1 \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{\varepsilon} - 1 < n^2 \quad \Rightarrow \quad n_0(\varepsilon) = \sqrt{\frac{4}{\varepsilon} - 1} < n.$$

Sei also $n_0(\varepsilon) = \sqrt{\frac{4}{\varepsilon} - 1}$ und $n > n_0(\varepsilon)$. Dann gilt:

$$|a_n - (-1)| = \frac{4}{n^2+1} < \frac{4}{n_0(\varepsilon)^2 + 1} = \frac{4}{\frac{4}{\varepsilon} + 1 - 1} = \varepsilon.$$

Aufgabe 1.4 (Grenzwerte III)**.** Bestimmen Sie (mit Rechnung) die Grenzwerte für folgende Folgen.

a) $a_n = \dfrac{n^2 - n + 2}{n^3 + n^2 - 1}$,

Lösung: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2 - n + 2}{n^3 + n^2 - 1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{-1} - n^{-2} + 2n^{-3}}{1 + n^{-1} - n^{-2}} = \dfrac{0}{1} = 0$

b) $b_n = \dfrac{n^3 - n + 2}{n^3 + n^2 - 1}$,

Lösung: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3 - n + 2}{n^3 + n^2 - 1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 - n^{-2} + 2n^{-3}}{1 + n^{-1} - n^{-2}} = \dfrac{1}{1} = 1$

Aufgabe 1.5 (Grenzwerte IV)**.** Bestimmen und begründen Sie mit den Grenzwertkriterien die Grenzwerte.

a) $f_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$,

Lösung: Wir schreiben mit Hilfe des dritten Binomischen Lehrsatzes um:

$$f_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \to 0.$$

b) $g_n = (-1)^n \cdot n^{-1}$,

Lösung: Beschränkte Folge $(-1)^n$ mal Nullfolge n^{-1}: $g_n \to 0$.

c) $h_n = \dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}$.

Lösung: Wir schreiben um:

$$h_n = \frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2} \to \frac{1}{2}.$$

Aufgabe (Zusatz) 1.6 (Komplexe Zahlen)**.** Berechnen Sie

$$\frac{5+3i}{(7-2i)^{-1}\cdot(1-2i)} \cdot \left|\overline{3-4i}\right| - \overline{(2-3i)}$$

und geben Sie das Ergebnis in der Form $a+bi$ mit $a,b \in \mathbb{R}$ an.

Lösung:

$$\begin{aligned}
&\frac{5+3i}{(7-2i)^{-1}\cdot(1-2i)} \cdot \left|\overline{3-4i}\right| - \overline{(2-3i)}\\
&= \frac{(7-2i)(5+3i)}{(1-2i)} \cdot \sqrt{3^2+4^2} - (2+3i)\\
&= \frac{(7-2i)(5+3i)(1+2i)}{1^2+2^2} \cdot 5 - 2 - 3i\\
&= (35+21i-10i+6)(1+2i) - 2 - 3i\\
&= (41+11i)(1+2i) - 2 - 3i\\
&= 41+82i+11i-22-2-3i = \underline{\underline{17+90i}}
\end{aligned}$$

Aufgabe (Zusatz) 1.7 (Ungleichungen)**.** Bestimmen Sie die Lösungsmengen (in $\mathbb{R}$) der folgenden Ungleichungen.

a) $|x+3| < 5$,

Lösung:

$$\begin{aligned}
|x+3| &< 5 && \mid\ |\cdot| \text{ auflösen}\\
-5 < x+3 &< 5 && \mid -3\\
-7 < x &< 2\\
\text{Lösungsmenge}: &\ \underline{\underline{x \in (-8,2)}}
\end{aligned}$$

b) $x^2 - 2x \leq 3$,

Lösung:
$$\begin{aligned} x^2 - 2x &\leq 3 && \mid +1\\ x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 &\leq 4 && \mid \sqrt{\cdot}\\ |x-1| &\leq 2 && \mid |\cdot| \text{ auflösen}\\ -2 \leq x - 1 &\leq 2 && \mid +1\\ -1 \leq x &\leq 3 &&\\ \text{Lösungsmenge}: &\ \underline{\underline{x \in [-1, 3]}} && \end{aligned}$$

Aufgabe (Zusatz) 1.8 (Vollständige Induktion). Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion:[1]

a) Es gilt
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
für alle $n \in \mathbb{N}$.

Lösung: IA $(n = 1)$: Sei $n = 1$, dann gilt
$$\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1^2 = 1 = \frac{1 \cdot (1+1) \cdot (2 \cdot 1 + 1)}{6},$$
d.h. die Induktionsvoraussetzung stimmt.

IS $(n \to n+1)$:
$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2\\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2\\ &= \frac{(n+1)[(2n^2+n) + (6n+6)]}{6}\\ &= \frac{(n+1)[2n^2+3n+4n+6]}{6}\\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}. \end{aligned}$$

[1](IA): Zeigen Sie die Aussage stimmt für ein $n = n_0$ (hier $n_0 = 1$ in (a) und $n_0 = 2$ in (b)).
(IS): Zeigen Sie, wenn die Aussage für ein n gilt, dann auch für $n+1$. Siehe Tutorienblatt 1-und-2.

b) Es gilt

$$2^n > n + 1$$

für alle $n \geq 2$.

Lösung: IA ($n = 2$): $2^2 = 4 > 3 = 2 + 1$.

IS ($n \to n + 1$): $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \overset{\text{IV}}{>} 2 \cdot (n + 1) = 2n + 2 = (n + 2) + n > n + 2$.